

부과방식 공적연금의 거시경제적 영향

박 창 균

(중앙대학교 경영대학 조교수)

허 석 균

(한국개발연구원 부연구위원)

Macroeconomic Consequences of Pay-as-you-go Public Pension System

Chang-Gyun Park

(Assistant Professor, College of Business Administration,
Chung-Ang University)

Seok-Kyun Hur

(Associate Reserch Fellow, Korea Development Institute)

* 박창균: (e-mail) cp19@cau.ac.kr, (address) Chung-Ang University, 211 Heukseok-dong,
Dongjak-gu, Seoul, Korea
허석균: (e-mail) hur@kdi.re.kr, (address) Korea Development Institute, 49 Hoegiro,
Dongdaemun-gu, Seoul 130-740, Korea

- Key Word: 확정급여(Defined Benefit(DB)), 확정기여(Defined Contribution(DC)), 부과방식(Pay-As-You-Go (PAYGO)), 적립방식(Funded System), 자본축적(Capital Accumulation), 일반균형 중첩세대모형 (General Equilibrium Model with Overlapping Generations),
- JEL code: E21, H55
- Received: 2008. 6. 2 • Referee Process Started: 2008. 6. 9
- Referee Reports Completed: 2008. 12. 5

ABSTRACT

We analyze macroeconomic consequences of pay-as-you-go (PAYGO) public pension system with a simple overlapping generations model. Contrary to large body of existing literatures offering quantitative results based on simulation study, we take another route by adopting a highly simplified framework in search of qualitatively tractable analytical results. The main contribution of our results lies in providing a sound theoretical foundation that can be utilized in interpreting various quantitative results offered by simulation studies of large scale general equilibrium models.

We present a simple overlapping generations model with a defined benefit(DB) PAYGO public pension system as a benchmark case and derive an analytical equilibrium solution utilizing graphical illustration. We also discuss the modifications of the benchmark model required to encompass a defined contribution(DC) public pension system into the basic framework. Comparative statics analysis provides three important implications; First, introduction and expansion of the PAYGO public pension, DB or DC, result in lower level of capital accumulation and higher expected rate of return on the risky asset. Second, it is shown that the progress of population aging is accompanied by lower capital stock due to decrease in both demand and supply of risky asset. Moreover, risk premium for risky asset increases(decreases) as the speed of population aging accelerates(decelerates) so that the possibility of so-called "the great meltdown" of asset market cannot be excluded although the odds are not high. Third, it is most likely that the switch from DB PAYGO to DC PAYGO would result in lower capital stock and higher expected return on the risky asset mainly due to the fact that the young generation regards DC PAYGO pension as another risky asset competing against the risky asset traded in the market. This theoretical prediction coincides with one of the firmly established propositions in empirical literature that the currently dominant form of public pension system has the tendency to crowd out private capital accumulation.

본 연구는 간단한 일반균형 중첩세대모형을 사용하여 공적연금의 거시경제적 영향에 대한 정성적(qualitative) 분석 결과를 제시하는 것을 목적으로 한다. 이는 분석적인(analytical) 방법으로 균형을 찾고 그 성질을 탐구하는 것이 불가능하여 다양한 형태의 수치 분석적 기법을 동원하

는 기존 선행연구들이 제시하고 있는 정량적(quantitative) 분석의 결과를 이론적으로 해석할 수 있는 기제를 마련한다는 차원에서 의미를 가지는 것으로 평가된다. 본 연구는 우선 논의의 단순화를 위해 확정급여(defined benefit)형 부과방식(pay-as-you-go) 공적연금체제하의

ABSTRACT

2세대 일반균형 중첩세대모형을 제시하고 이로부터 명시적인 균형해를 도출한다. 다음으로 본 연구에서는 공적연금의 존재 및 그로 인한 이전재원규모의 증감, 고령화를 비롯한 경제활동인구의 감소 등과 같은 상황이 경제의 자본 축적 및 자본의 기대수익률에 미치는 영향을 분석한다. 더불어 기본모형의 신용계약 존재 여부, 그리고 확정기여(defined contribution)형 부과방식 혹은 적립방식(funded system) 공적연금의 도입에 따른 거시경제적 영향을 논의한다. 그 결과 공적연금의 도입 및 이전재원규모의 증가는 자본 축적에 부정적인 영향을 미친다는 사실을 확인하였다. 다음으로 고령화의 진전이 자본 축적에는 부정적인 결과를 초래하지만 자본의 기대수익률에 미치는 영향에 대해서는 확정적

인 결론을 내릴 수 없었음을 발견하였다. 다만, 위험자산, 즉 자본에 지급되는 위험 프리미엄이 고령화가 가속화되는 시기에 커지는 반면 고령화의 진전이 더디어지는 시기에는 작아진다는 결과를 도출함으로써 고령화에 따른 자산시장 붕괴(meltdown) 현상의 발생가능성을 배제할 수는 없으나 부과방식 공적연금하에서는 그 가능성이 그리 크지 않을 수도 있음을 확인하였다. 한편, 확정급여형에 비하여 확정기여형의 공적연금이 시장에서 거래되는 위험자산인 자본 축적을 구축하는 경향이 더 크다는 사실을 확인하였는데, 이는 저축의 주체인 청년층이 확정기여형 공적연금의 수급권을 자본과 대체관계를 형성하는 대안적 위험자산으로 인식하기 때문인 것으로 나타났다.

1. 서론

본 연구는 공적연금의 존재 및 운용방식이 거시경제에 미치는 영향을 고찰하기 위한 이론적 시도의 일환이다. 보다 구체적으로 본 연구에서는 경제에 존재하는 불확실성을 완전히 헤지(hedge)할 수단이 제공되지 않는 불완전시장(incomplete market)이 명시적으로 고려된 일반균형모형을 활용하여 공적연금의 거시경제적 영향을 분석한다.

현재까지 공적연금의 거시경제적 영향과 관련하여 사회후생(social welfare) 측면에서 많은 논의가 있어 왔다. 즉, 대부분의 기존 논의는 불완전시장(incomplete market)을 가정하고 공적연금 도입의 사회후생효과가 양(+)인지 음(-)인지를 밝히고 그 이론적 원천을 찾아내는 데 관

심을 집중하였다. 완전시장을 가정하는 경우 공적연금의 도입은 정의상 기존의 금융시장에서 누릴 수 있던 금융서비스를 공적연금이라는 별도의 명칭으로 누릴 수 있음을 의미한다. 따라서 완전시장에 공적연금이 도입되는 경우 사회후생 효과는 0이 되어 버리는데, 이는 구축효과(crowding-out effect)나 리카디안 동등성(Ricardian equivalence) 등으로 인하여 공적연금을 정확히 상쇄하는 수준으로 사적 저축이 감소하는 현상이 발생하기 때문이다.²⁾

반면, 불완전시장에 공적연금이 도입되는 경우 두 가지 상반되는 경제적 효과를 기대할 수 있다. 하나는 후생 측면에서 긍정적인 기능을 강조하는 보험효과(insurance provision)이며, 다른 하나는 부정적인 기능을 강조하는 왜곡효과(distortionary effect)이다. 보험효과는 공적연금의 수급구조가 시장의 불완전성으로 인하여 시장에서 거래되는 기존의 금

- 1) 선행연구의 대부분은 부과방식 공적연금을 분석의 대상으로 삼고 있다. 반면, 우리나라의 공적연금인 국민연금은 원칙적으로 적립방식(funded system)을 기반으로 한다. 따라서 부과방식을 전제로 한 대부분의 기존 논의 결과를 우리나라의 경우에 직접적으로 대입하는 것은 무리이다. 적립방식 공적연금을 명시적으로 고려한 이론적 논의는 아직 많지 않으나 허석균(2007) 등이 일부 연구성과를 발표하고 있다.
- 2) 구축효과나 리카디안 동등성은 공적 영역에서 취해진 조치가 사적 영역에서 반작용을 유발하여 전체적으로는 그 효과가 무력화되는 상태를 의미한다는 점에서 유사한 개념이다. 그러나 구축효과의 경우에는 의도하지 않은 변수의 움직임을 제어하지 못하는 반면 리카디안 동등성은 이러한 변수들 역시 영향 받지 않는 상태를 의미한다. 예를 들어, 재정지출을 늘리기 위한 정부채권의 발행증가가 이자율의 상승(채권가격의 하락)으로 민간투자를 그만큼 줄이는 경우, 총수요는 채권발행 이전과 변함이 없을 것이나, 금리는 이전보다 오른 상태가 된다. 이것이 통상적인 구축효과의 교과서적인 예이다. 반면, 재정지출을 늘리기 위한 정부채권의 발행증가에 대하여 민간부문이 향후 조세부담이 증가할 것으로 예상하여 그에 상응하는 만큼 저축을 늘리는 경우, 총수요는 변함이 없고 금리 역시 이전과 동일한 상황이 연출될 수 있는바, 이와 같은 현상을 리카디안 동등성이라고 지칭한다.

용상품의 조합으로는 얻을 수 없는 현금 흐름을 제공하므로 공적연금의 도입이전에는 적절히 대응할 수 없었던 위험을 헤지할 수 있는 수단을 제공한다는 측면을 의미하는 것이며, 왜곡효과는 조세부과와 마찬가지로 강제성을 띠는 연금제도로 인하여 상대가격이 왜곡되고 이로 인하여 비효율적 자원배분이 이루어진다는 측면을 의미하는 것이다. 인적자본시장의 부재나 신용제약을 위시한 각종 마찰적 요인의 존재 등에 비추어 볼 때 불완전시장을 가정하는 것이 현실을 보다 설득력 있게 모형에 수용하는 선택으로 판단된다. 본 연구는 불완전시장을 전제로 공적연금의 운용방식 차이로 인한 거시경제 균형의 차이 분석을 주된 목적으로 한다. 다만, 대규모 일반균형모형에 근거하여 수치 분석적 기법을 사용한 정량적(quantitative)인 결과를 제시하던 기존의 연구방법론을 탈피하고 최대한 추상화되고 단순한 모형을 기반으로 정성적(qualitative)이고 분석적인(analytic) 결과를 도출하는 데 논의를 집중한다.

단순한 모형을 기반으로 정성적인 결과를 유도하고자 하는 까닭은 공적연금의 운용방식과 거시경제 간의 관계와 관련된 논의를 이해하는 기초적이고 종합적인 이론적 도구를 확보하기 위해서이다. 공적연금의 거시경제적 영향을 주제

로 한 기존 논의의 주류가 점차 고도화된 계산능력을 자랑하는 컴퓨터를 이용한 확률일반균형 중첩세대모형(stochastic general equilibrium model with overlapping generations)의 계산을 방법론으로 채택하여 높은 수준의 기술적 성취를 이루었으나, 이는 여전히 많은 시간과 자원의 투입을 요구하는 매우 어려운 작업이며, 산출된 결과에 대하여 적절한 해석을 부여하고 그러한 결과가 도출된 경제적 배경에 대한 논리를 제공하는 작업은 더욱 어려운 일이다. 특히 적절한 해석을 위한 이론적 모형이 뒷받침되지 않는 경우 이 같은 어려움은 가중되는데 바로 이러한 이유로 인하여 비록 지나칠 정도로 간단하고 고도로 추상화된 모형이라고 하더라도 명시적인 균형을 구할 수 있고 균형의 경제적 배경을 추적할 수 있는 간단한 모형을 구축할 수 있다면 이는 그 자체로서 매우 의미 있는 일이라고 판단된다. 그러나 기존의 연구는 이러한 측면에서 별다른 성과를 보이지 못하고 있으며 본 연구의 결과는 바로 그러한 이론적 진공을 일부나마 메우는 데 기여한다는 측면에서 본 연구의 의의를 찾을 수 있다.

이하에서의 논의는 다음과 같은 순서로 이루어진다. 먼저, 제II장에서는 공적연금의 거시경제적 역할에 관하여 논의한 기존 문헌을 소개한다.³⁾ 다음으로 제

3) 관련 문헌의 대부분이 부과방식 공적연금제도에 기초하고 있으므로 이들로부터의 결과를 우리나라 경우에 그대로 적용하는 것은 해석상 주의를 요한다. 그러나 현재의 적립방식 연금구조가 장기적으로는

III장에서는 기본모형을 소개한다. 기본모형은 불완전시장하에서 확정기여형 부과방식 공적연금이 운용되는 상황을 전제로 한다. 개인의 소비, 저축 및 자산배분 패턴을 도출하고 위험자산과 무위험자산의 수익률 결정요인을 살펴본다. 더불어 공적연금의 도입 또는 적용 정도 확대와 고령화의 진전에 수반되는 사회후생효과를 평가한다. 제IV장에서는 제III장에서 제시한 모형의 채택 가정을 완화시킨 후 기본모형의 분석을 통하여 제시한 결과가 어떻게 바뀌는지를 살펴본다. 개인의 효용극대화 문제에 신용계약이 추가적으로 부과되는 경우와 확정기여(DC) 부과방식 공적연금이 도입되는 경우를 각각 분석해 본다. 제V장에서는 제IV장까지의 논의를 정리하는 한편, 본 연구의 한계를 논의하고 후속 연구방향을 제시한다.

II. 관련 문헌

공적연금의 거시경제적 영향이라는 본 연구의 주제와 유사한 주제를 가진 연구들이 특히 최근 들어 다수 출현하고 있는데, 대체로 이들 연구들은 불완전시장(incomplete market)을 전제로 한다는 공통점을 가지고 있다.⁴⁾ 이러한 모형 설정 전략은 세대 간의 자원이동수단으로서 공적연금에 존재 당위성을 부여하기 위하여 취해진 것이다.⁵⁾

기존의 투자수단들로서는 헤지할 수 없는 위험이 존재하는 불완전시장에 공적연금이 도입되는 경우 그러한 위험을 제거 내지는 회피하는 것이 가능해지는 경우가 있는데 이를 공적연금의 보험효과라고 통칭한다. 특히 자본수익률과 노동소득이 불완전하나마 상관관계를 가지며 총체적 충격(aggregate shock)에 의해 영향을 받는 경우 공적연금의 도입은 노동소득의 변동에 따른 충격을 청·장년층으로부터 노년층으로 이전하는 효과를

지속가능하지 않다는 공감대가 이미 폭넓게 형성되어 있고 언젠가는 국민연금제도가 적립방식에서 부과방식으로 바뀔 수밖에 없다는 데 대부분의 논자가 동의하고 있다. 그러므로 기존 문헌의 논의가 우리나라의 상황과 전혀 동떨어진 것이라고 단정할 수만은 없다.

- 4) 앞서 언급한 바와 같이 기존 문헌의 대부분이 미국의 사회보장제도를 기준으로 삼고 있는 관계로 부과방식의 확정급여(defined benefit)형 혹은 확정기여(defined contribution)형의 공적연금을 분석대상으로 설정하고 있다. 따라서 이후 소개되는 문헌의 결과들은 모든 방식의 공적연금에 적용되는 일반적인 속성이라기보다는 부과방식 확정급여형 혹은 확정기여형 연금의 특수성에 기인할 가능성이 있음에 유의할 필요가 있다.
- 5) 구체적으로는 불완전성을 도입하기 위하여 헤지(hedge) 가능하지 않은 위험자산이나 유동성 제약의 모형에 도입하는 등의 방식이 일반적으로 채택되고 있다. Krueger and Kubler(2006)이나 Brooks(2003) 등의 연구를 참고하시오.

가지는 것으로 알려져 있다(Shiller[1999] 또는 Bohn[2001, 2004]). 반면, Feldstein and Liebman(2002) 등의 연구는 공적연금과 같은 강제저축이 민간저축을 일정 부분 대체하는 구축효과(crowding-out effect)가 발생하는 것이 일반적이며 따라서 공적연금으로 귀속된 재원이 커질수록 자본 축적이 저해되어 궁극적으로는 노동소득의 감소 및 경제성장의 저하로 귀결되는 공적연금의 민간저축에 대한 부정적인 효과를 강조한다.

공적연금의 보험효과와 구축효과를 강조하는 두 주장은 각기 나름의 이론적·실증적 근거를 갖고 있는 것으로 판단된다. 따라서 공적연금 존립의 후생경제학적 근거는 양(+)의 보험효과가 음(-)의 구축효과⁶⁾를 압도하는지 여부에 의하여 결정될 것이다(Krueger and Kubler[2006], Sanchez-Marcos and Sanchez-Martin[2006]). 연금의 사회후생효과에 대한 기존의 논의들은 시장의 불완전성을 도입하는 경우에도 양(+)의 보험효과는 2차적 효과일 뿐이며 1차적인 구축효과를 압도하지 못한다는 모의실험 결론에 근거하여 공적연금의 비효율성을 지적하고 있다.

공적연금과 거시경제변수 간의 관계를 분석한 기존의 문헌들은 경제 내에 존재하는 자산의 종류, 연금 납입 및 지급 방식에 따라 서로 가정을 채택하고 있으며 이를 기준으로 기존 연구를 유형화할 수 있다.⁷⁾

먼저, 경제에 존재하는 자산의 개수를 기준으로 삼는 경우 위험자산과 무위험자산을 둘 다 고려하는 모형인지 아니면 위험자산 하나만을 허용하는 모형인지에 따라 구분할 수 있다. 두 종류의 자산이 존재하는 경우에 비하여 위험자산이나 무위험자산 중 하나만 존재하는 경우 분석 결과가 질적으로 다를 이유는 없겠으나 위험에 따른 초과수익률, 즉 위험 프리미엄을 명시적으로 구할 수 없다는 단점이 있다. 이를 감안하여 본 연구에서는 위험자산과 무위험자산이 같이 존재하는 모형을 제시한다.

두 번째로 공적연금은 재정운용과 관련하여 매기 연금납입과 연금급여의 규모를 일치시키는 비적립방식(unfunded system)과 이를 일치시키지 않는 기금적립방식(funded system)으로 구분되며 대부분의 기존 연구들은 비적립방식의 대표

6) 기존의 모형들은 대부분 연금제정이 부과방식으로 매기 정산된다는 가정에 기초한다. 따라서 축적된 연금자산이 금융시장에서 운용되어 경제 내의 자본 축적에 투여되고 궁극적으로는 경제성장에 영향을 주는 과정이 생략되어 있다. 이를 감안하면 기존 모형의 결과가 구축효과를 실제보다 과대(혹은 과소) 평가하고 있을 가능성이 매우 높다고 할 것이다.

7) 이와 같은 분류가 의미를 가지는 이유는 각각의 경우에서 공적연금이 금융시장에서 수행하는 자산으로서의 속성이 이에 따라 달라질 수 있기 때문이다. 예컨대, 부과방식을 전제로 확정급여형 공적연금은 무위험자산으로, 확정기여형 공적연금은 위험자산으로 인식된다.

적 형태인 부과방식(pay-as-you-go) 공적 연금을 분석대상으로 설정하고 있다. 이는 기존 연구들이 부과방식 공적연금을 운용하고 있는 구미 제국에서 주로 이루어지고 있다는 점에 주로 기인하지만 적립방식의 공적연금을 도입하는 경우 분석적으로 매우 어려운 문제점들이 존재하기 때문이기도 하다. 본 연구에서는 기존 연구들과 동일한 틀을 유지한다는 측면에서 부과방식 공적연금을 상정한 분석 결과를 제시한다.

세 번째로 공적연금은 납입과 급여 규모를 결정함에 있어 어느 쪽을 먼저 고정하는지 여부에 따라 확정급여형(defined benefit)과 확정기여형(defined contribution)으로 나뉜다. 이러한 구분은 매기 연금재정이 균형을 이루어야 하는 부과방식에서는 상대적으로 큰 중요성을 가지는데, 급여규모를 먼저 확정하는 경우 납입규모가, 납입규모를 먼저 확정하는 경우에는 급여규모가 각각 연금재정의 균형조건으로부터 종속적으로 결정되기 때문이다.⁸⁾ 기존의 연구에서도 확정급여형과 확정기여형을 명시적으로 구분하여 분석하고 있는 경우가 다수인데 본 연구에서는 분

석의 편의를 고려하여 확정급여형을 가정한 모형을 기본모형으로 설정하고 이를 확정기여형의 경우와 대비하여 차이점을 논의하는 방식으로 논의를 전개한다.

III. 모 형

1. 경제구조

가. 인구구조

노인으로 태어나 노년기만을 살아가는 최초 노인층(initial old)을 제외하고 모든 개인은 청년기와 노년기의 2기간 동안 삶을 영위한다. 따라서 시점 t 에서 경제 내에는 시점($t-1$)에 태어난 노년층과 시점 t 에 태어난 청년층이 공존한다. q_t 를 t 기에 청년기의 삶을 살아가는 경제주체의 수로 정의하면 t 기에 이 경제에 존재하는 총인구는 $(q_{t-1} + q_t)$ 가 되며 이 중 청년층이 $q_t / (q_t + q_{t-1})$, 노년층이 $q_{t-1} / (q_t + q_{t-1})$ 의 비중을 차지하게 된다.

한편, 시점 t 의 청년층인구증가율⁹⁾은

8) 적립방식하에서는 급여규모와 납입규모 사이에 연금자산이 완충작용을 하고 있으므로 이와 같은 관계가 느슨해진다. 우리나라의 국민연금제도는 엄밀한 의미에서 확정급여나 확정기여 중 어느 한쪽이라고 분류하기 어려우며 오히려 급여 규모와 납입규모가 동시에 확정되는 형태로 파악하는 것이 보다 정확한 판단일 것이다. 이는 우리나라 국민연금이 기금적립방식을 채택하고 있어 급여수준과 부담수준을 동시에 고정하는 것이 적어도 이론적으로는 가능하기 때문이다.

9) 이하에서는 논의의 편의상 인구증가율은 청년인구증가율을 지칭하는 것으로 정의한다. 더불어 매기에 태어나는 청년층 $\{q_t, t=0,1,2,\dots\}$ 는 이미 알려져 있는 것으로 가정한다.

다음과 같이 정의할 수 있다.¹⁰⁾

$$g_t^p \equiv \left(\frac{q_t}{q_{t-1}} - 1 \right) \quad (1)$$

이 경우 시점 t 의 노년층 인구비중은 $\frac{1}{(2 + g_t^p)}$ 로 주어지고 고령화의 진전을 전체 인구 중 노인인구의 비중 증가로 정의한다면 청년인구증가율 g_t^p 의 하락을 출산율의 하락으로 인한 고령화의 진전으로 해석할 수 있다.

나. 개 인

개인은 청년기와 노년기 2기간에 걸쳐 생애효용의 극대화를 추구한다. 생애효용함수는 청년기와 노년기의 소비에 대하여 시간 분리적(time-separable)이고 가합적(additive)이라고 가정한다. 청년기에 개인은 자신에게 부여된 1단위의 노동력을 비탄력적으로 공급하여 임금소득을 획득하고 이를 청년기 소비, 공적연금 납입, 저축의 용도로 각각 배분한다. 또한, 청년층은 저축의 총량을 결정할 뿐 아니라 위험자산과 무위험자산에 각각 얼마만큼을 배분할지를 결정하여야 한다. 한편, 노년기의 개인은 노동시장에 참가하지 않고 투자소득과 연금소득으로 소비

재원을 마련한다.

이상을 정식화하면 시점 t 에 청년기를 살아가는 개인의 생애효용 극대화 문제는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \max & u(c_t^y) + \beta E_t[u(c_{t+1}^o)] \\ \text{s.t.} & c_{t+1}^o \leq ((1 - s_t)w_t - c_t^y) \\ & (\alpha_t(1 + z_{t+1}) + (1 - \alpha_t)(1 + r_{t+1})) + \eta_t w_t \end{aligned} \quad (2)$$

위에서 (c_t^y, c_{t+1}^o) 은 청년기와 노년기의 소비벡터, s_t 는 공적연금의 기여율, w_t 는 임금, α_t 는 투자자산 중 위험자산의 비중, z_{t+1} 는 위험자산의 수익률, 그리고 r_{t+1} 은 무위험자산의 수익률이다. 한편, 예산제약의 마지막 항인 $\eta_t w_t$ 는 연금소득을 나타내는데 여기에서 η_t 는 소득 대체율을 나타낸다. 공적연금이 확정급여(defined benefit)방식에 의하여 운영되고 가정하였으므로 s_t 와 η_t 는 청년기에 미리 소득 w_t 와 연금재정의 수지균형을 고려하여 확정된다.

식 (2)의 효용극대화 문제가 내부해(inner solution)를 가지기 위한 각종 정규 조건들(regularity conditions)을 만족한다고 가정하고 최적화의 일계필요조건(first-order necessary conditions)을 구하면 다음과 같이 주어진다.

10) 따라서 시점 t 의 전체 인구증가율은 $\frac{(g_{t-1}^p + g_t^p + g_{t-1}^p g_t^p)}{(g_{t-1}^p + 2)}$ 가 되며 청년인구증가율이 g^p 로 일정한 경우 전체 인구증가율은 g^p 로 청년인구증가율과 같게 된다.

$$u'(c_t^y) - \beta E_t [u'(c_{t+1}^o)(\alpha_t(1+z_{t+1}) + (1-\alpha_t)(1+r_{t+1}))] = 0 \quad (3)$$

$$E_t [u'(c_{t+1}^o)(z_{t+1} - r_{t+1})] = 0 \quad (4)$$

최대한 단순한 모형구조를 선택함으로써 분석적인 결과를 도출하여 정성적인 결론을 제시한다는 목적 달성을 위해 기간효용함수(instantaneous utility function)의 절대위험회피도(degree of absolute risk aversion)가 일정한 값을 가지는 형태를 취한다고 가정한다.¹¹⁾

$$u(c) \equiv -\exp(-\kappa c), \quad 0 < \beta < 1 \quad (5)$$

이 경우 식 (3)과 (4)에 주어진 최적화 일계조건은 다음과 같은 구체적인 형태를 가진다.

$$\kappa \exp(-\kappa c_t^y) - \beta E_t [\kappa \exp(-\kappa c_{t+1}^o) (\alpha_t(1+z_t) + (1-\alpha_t)(1+r_{t+1}))] = 0 \quad (6)$$

$$E_t [\kappa \exp(-\kappa c_{t+1}^o)(z_{t+1} - r_{t+1})] = 0 \quad (7)$$

다. 기 업

소비자는 노동과 자본을 사용하여 규모에 따른 보수불변(constant returns to scale)의 특성을 나타내는 콥-더글라스(Cobb-Douglas) 생산함수에 따라 생산된다.

$$y_t \equiv A_t f(L_t, K_{t-1}) = A_t L_t^{1-\theta} K_{t-1}^\theta \quad (8)$$

청년층은 노동을 제공하며 이들이 위험자산에 투자한 재원은 다음 기의 생산 과정에 투여될 자본을 축적하는 원천으로 사용된다. 논의의 편의를 위하여 자본은 생산과정에서 완전히 감가상각되는 것으로 가정한다. 이는 t 기에 투자된 생산설비가 $t+1$ 기의 생산에 기여한 후 $t+2$ 기 이후에는 소진됨을 의미한다. 완전 감가상각의 가정이 극단적인 것처럼 보이지만 모형상의 1기가 현실에서는 짧게는 30년 길게는 40년 정도의 기간에 해당하는 점을 감안하면 현실적으로 그리 비현실적인 가정은 아니다.¹²⁾ 또한, 완전 감가상각의 가정은 한 세대의 의사결정이 다음 세대의 의사결정에 대한 기대에 영향 받지 않도록 함으로써 전방 해법

11) 이와 같이 절대위험회피도가 일정한 효용함수를 가진다는 가정을 채택함으로써 인해 분석 결과가 다소 일관성을 잃을 것임은 명백하나 식 (6)과 (7)의 기대효용을 명시적으로 계산하는 것을 가능토록 함으로써 분석적인 최종 결과 도출에 결정적인 공헌을 한다. 필자들은 효용함수가 일정한 상대위험회피도를 가지는 경우에도 이하에서 제시된 분석 결과와 사실상 동일한 결과를 도출할 수 있음을 확인하였다.

12) Brooks(2002)에서와 같이 자본재의 감가상각률을 연간 5%로 가정하더라도 자본재의 잔존가치는 30년 후에는 $0.21 (= 0.95^{30})$, 그리고 40년 후에는 $0.13 (= 0.95^{40})$ 수준에 불과하다.

(forward solution)을 통하여 이 경제의 균형형을 명시하는 것이 가능하도록 해주는 장점을 가진다. 한편, 생산에 투입된 한 단위의 소비재는 한 단위의 자본으로 전환되며, 이후 축적된 자본을 생산과정을 거치지 않고 소비재로 다시 변환하는 것은 가능하지 않다고 가정한다.¹³⁾

이상의 가정에 소비재시장과 생산요소 시장이 완전경쟁적이라는 가정을 더하면 생산과정에 투입된 노동과 자본에 대한 보수 w_t 와 z_t 는 각 요소의 한계생산성¹⁴⁾과 일치하며 구체적으로 다음과 같이 주어진다.

$$w_t = (1 - \theta)A_t q_t^{-\theta} K_{t-1}^{\theta} \quad (9)$$

$$z_t = \theta A_t q_t^{1-\theta} K_{t-1}^{\theta-1} - 1 \quad (10)$$

한편, 총요소생산성(Total Factor Productivity: TFP) A_t 가 다음과 같이 주어진 확률과정(stochastic process)을 따른다는 가정을 추가함으로써 경제에 불확실성을 부여한다.¹⁵⁾

$$\ln A_{t+1} = \ln A_t + \epsilon_{t+1} \quad (11)$$

위에서 ϵ_{t+1} 은 평균 0, 분산 σ^2 인 정규 분포를 따르고 시계열적으로 상관관계가 존재하지 않는(serially uncorrelated) 확률 변수이다.

라. 정 부

이 경제에서 정부는 공적연금의 관리자로서 존재한다. 공적연금의 성격을 매기 수지균형을 맞추어야 하는 부과방식으로 정의하였으므로 정부의 구체적인 역할은 수지균형을 유지하기 위해 연금 부담률 또는 소득대체율을 조정하는 것으로 한정된다. 특히 확정급여형 부과방식 공적연금을 운용하는 경우 정부는 소득대체율 η_t 을 시점 t 에서 먼저 고정시킨 다음 연금수지를 맞추기 위해 연금부담률 s_t 를 다음과 같이 조정한다.

$$s_t = \frac{\eta_t w_{t-1} q_{t-1}}{w_t q_t} \equiv \frac{\eta}{(1 + g_t^w)(1 + g_t^p)} \quad (12)$$

13) 통상적으로 형성된 자본의 소비재로의 역전환이 허용되지 않는 경우 매기 $K_t \geq (1 - \delta)K_{t-1}$ 의 부등호 제약이 지켜져야 한다. 하지만 $\delta=1$ 의 가정은 이를 $K_t \geq 0$ 으로 바꾸어 놓아 별도의 조치를 불필요하게 만든다.

14) 보다 정확히 말하면 자본의 경우는 자본의 한계생산성에서 감가상각률 $\delta = 1$ 을 뺀 값이다.

15) 이 경제에 불확실성을 부여하는 요인으로 인구구조의 변동(매기 태어나는 청년층인구 $\{q_t, t=0, 1, 2, \dots\}$ 의 변동)을 고려하지 않은 것은 TFP 성장률에 비하여 인구성장률이 상대적으로 안정적이며 예측가능하다는 측면을 고려한 까닭이다. 더불어 연금제도와 관련한 인구구조의 변화에 대한 관심이 인구구조의 변동성 자체보다는 고령화 현상과 같은 추세 변화에 있다는 점에서도 분석의 편의를 위해 $\{q_t, t=0, 1, 2, \dots\}$ 가 미리 알려진 것으로 가정하였다.

위에서 g_t^w 는 $\left(\frac{w_t}{w_{t-1}} - 1\right)$ 로 정의된 임금 증가율이다. 공적연금의 운영방식상 청년층 소비자의 입장에서 공적연금은 수익률이 $\left(\frac{\eta}{s_t} - 1\right)$ 로 주어지는 무위험자산의 하나로 인식된다.¹⁶⁾ 따라서 연금저축은 무위험자산으로서 기존의 무위험자산과 중복되는 자산(redundant asset)이 될 수 있으며, 이 경우 연금저축과 무위험자산의 수익률이 다른 경우 수익률이 높은 자산으로 수요가 몰리는 쏠림 현상이 발생하게 된다. 그러나 두 자산의 수익률이 다른 경우에도 공적연금의 강제성¹⁷⁾으로 인하여 일정 규모 이상의 차익거래기회(arbitrage opportunity)가 발생하지는 않는다.

마. 시장균형(market equilibrium)

이 경제에는 재화시장, 노동시장, 위험자산시장 및 무위험자산시장이 존재하며, 이들의 균형은 다음 조건이 성립할 때 달성된다.

(i) 재화시장: 생산된 재화는 소비 또는 저축(투자)의 용도로 처분된다. 한편, 기금을 적립하지 않는 부과방식 공적연금의 특성상 민간부문의 소득은 소비와 투자의 용도로 지출되며, 정부부문에 의한 직접적 소비 및 투자는 존재하지 않는다. 따라서 재화시장의 균형조건은 매기 다음과 같은 시장청산조건을 성립을 요구한다.

$$y_t = q_t c_t^j + q_{t-1} c_t^o + K_t \quad (13)$$

(ii) 노동시장: 완전고용을 가정한다면 노동공급이 $L_t = q_t$ 수준에서 완전히 비탄력적으로 이루어진다. 한편, 균형임금은 식 (6)에 주어진 바와 같이 노동의 한계생산성 수준에서 결정된다. 즉, 노동시장은 완전고용과 요소시장의 완전경쟁에 의하여 항상 균형상태를 유지한다.

(iii) 무위험자산시장: 청년기를 살아가는 경제주체의 무위험자산(혹은 부채) 투자액이 0이 되는 수준에서 균형이 달성되며 무위험자산의 수익률이 결정된다.

16) $\left(\frac{\eta}{s_t} - 1\right) \approx g_t^w + g_t^p$. 한편, $g_t^w = \left(\frac{w_t}{w_{t-1}} - 1\right) \approx \ln\left(\frac{w_t}{w_{t-1}}\right) = -\theta \ln(1 + g_t^L) + \theta(1 + g_{t-1}^K) + \epsilon_t$ 인데, 완전고용의 가정에 의하여 고용증가율이 청년층인구증가율과 일치하므로 최종적으로 $\left(\frac{\eta}{s_t} - 1\right) \approx (1 - \theta)g_t^p + \theta g_{t-1}^K + \epsilon_t$ 로 나타낼 수 있다. 즉, 인구증가율이 높을수록 그리고 자본스톡 증가율이 높을수록 공적연금에 대한 수익률은 높아진다는 사실을 확인할 수 있다.
 17) 의무적 가입 및 투자액의 고정(급여액의 일정 비율)으로 인해 공적연금은 강제성을 띤 저축수단으로 인식된다.

$$q_t(1 - \alpha_t)((1 - s_t)w_t - c_t^y) = 0 \quad (14)$$

위의 식 (14)에 의하면 균형상태에서 $\alpha_t = 1$ 의 조건이 요구되는데, 이는 모든 청년층이 위험자산에만 투자함을 의미한다. 무위험자산시장이 사실상 존재하지 않는 이와 같은 상황은 모형이 취하고 있는 중첩세대(overlapping generations) 구조 때문이다.¹⁸⁾¹⁹⁾ 즉, 노년층은 무위험자산을 공급할 유인이 전혀 없으므로 무위험자산은 전적으로 청년층이 공급하여야 한다. 그러나 청년층은 자신이 노년기에 접어들었을 때 이미 사망하고 없을 노인층에게는 무위험자산을 판매하지 않을 것이므로 세대 간(inter-generational) 무위험자산 거래가 이루어지지 않을 것임은 물론 모든 청년층은 동일한 효용함수를 보유하고 있으므로 세대 내(intra-generational) 무위험자산 거래 또한 발생하지 않는다. 한편, 무위험자산의 수익률 r_{t+1} 은 $\alpha_t = 1$ 의 수준에서 결정된다.

(iv) 위험자산시장: 청년층에 의하여 이루어지는 위험자산에 대한 투자는 자본으로 전환되어 바로 생산과정에 투하된다. 따라서 위험자산시장의 균형조건은 다음과 같이 주어진다.

$$K_t = \alpha_t q_t((1 - s_t)w_t - c_t^y) \quad (15)$$

이 경제에는 위에서 논의한 바와 같이 재화, 노동, 위험자산, 무위험자산 등 네 개의 시장이 존재한다. 그러나 완전고용 및 중첩세대 가정에 의하여 노동시장과 무위험자산시장의 균형조건은 간단하게 충족된다. 한편, 남은 두 개의 시장 중 재화시장의 균형은 위험자산시장의 균형이 달성되는 경우 Walras의 법칙에 의하여 자동적으로 달성이 보장되므로 이하에서는 위험자산시장의 균형조건만을 분석한다.

18) 물론 3세대 중첩세대모형을 선택하는 경우에는 청년층 혹은 장년층(청년층-장년층-노년층 중에서)이 양(+)의 무위험자산을 보유하는 현상을 이끌어 낼 수 있다. 하지만 이 경우에도 연금을 납입하고 있는 계층만을 묶었을 때(청년층+장년층) 이들의 순무위험자산 보유량은 항상 0이 되는데, 이는 연금 수혜층(노년층)에게 자금을 빌려줄 유인이 존재하지 않기 때문이다. 또한 청년층과 장년층이 보유한 위험자산보유량이 사회적 자본 축적량과 일치하게 됨은 물론이다. 결론적으로, 3세대 모형과 2세대 모형 간의 실질적 차이는 크지 않다는 점에서 상대적으로 분석이 용이한 2세대 중첩모형을 선택하였다.

19) 국채 및 조세를 도입하는 경우 역시 균형상태에서 무위험자산이 양(+)의 수량으로 존재하는 상황을 유도할 수 있다. 하지만 중첩세대모형을 감안하면, 이 경우 Ricardian equivalence가 성립하지 않게 되며, 재정정책의 변화에 따라 연금제도의 효과 역시 달라질 수 있다. 결국 정부채권과 조세를 포함하도록 현재의 모형을 확장하는 경우 연금제도와 재정정책의 결합효과에 대한 분석이 필요해진다. 본 연구에서는 연금제도 자체의 효과에 집중한다는 취지에서 이 부분을 사상하였으나, 정책적 함의의 중요성에 비추어 볼 때 추후 연구가 필요한 부분이다. 이 점을 지적해 주신 익명의 논평자에게 감사드린다.

2. 균형²⁰⁾의 결정

확정급여형 연금방식하에서 공적연금이 무위험자산의 하나로 인식된다는 사

실과 균형에서 무위험자산의 비중이 0이라는 점을 고려하여 소비자의 최적화 1계 조건인 식 (6)과 식 (7)을 풀면 다음과 같은 결과를 도출할 수 있다.²¹⁾

$$c_t^y = (1 - s_t)w_t - \frac{E_t[z_{t+1}] - r_{t+1}}{\kappa\sigma^2} \quad (16)$$

$$r_{t+1} \equiv g(E_t[z_{t+1}]; \Theta) = \sqrt{(E_t[z_{t+1}] + 2)^2 + 2\sigma^2(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2) - 2\kappa w_t \sigma^2(1 - s_t - \eta) - (2 + \sigma^2)} \quad (17)$$

무위험자산 수익률을 나타내는 식 (17)이 경제적 의미를 가지기 위해서는 제곱근호 내부가 음(-)의 값을 가지지 않아야 하는데 일단 그러한 조건이 성립된다고 가정한다.²²⁾

식 (16)과 식 (17)을 다시 정리하면 청년기의 위험자산에 대한 총수요, 즉 자본에 대한 총공급은 다음과 같이 자본의 기대수익률의 함수로 나타내어진다.

$$K_t^s \equiv q_t((1 - s_t)w_t - c_t^y) = q_t \frac{E_t[z_{t+1}] - g(E_t[z_{t+1}]; \Theta)}{\kappa\sigma^2} \quad (18)$$

한편, 위험자산에 대한 총공급, 즉 자본에 대한 총수요는 기업의 이윤극대화 1계 조건인 식 (10)에서 도출되는데 자본, 즉 위험자산 기대수익률의 함수로 나타내어진다.

$$K_t^d = [\theta A_t q_{t+1}^{1-\theta} \exp(-E_t[z_{t+1}])]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (19)$$

식 (18)과 식 (19)를 동시에 만족시키는 균형자본량 K_t^* 과 위험자산의 균형 기대수익률 $E_t^*[z_{t+1}]$ 을 찾아내면 이 경제의 균형 자원배분을 구할 수 있다.²³⁾ 다만,

20) 본 연구에서는 설명 및 계산의 편의를 위해 존재하는 다양한 균형 개념 가운데서도 즉각 균형(temporal equilibrium)만을 분석대상으로 삼는다.

21) 구체적인 도출과정은 [부록 1]을 참고하십시오.

22) 이하에서 자세히 논의할 것이나 위험자산시장에 안정적인 균형이 존재하는 경우 식 (17)의 제곱근호 안은 항상 양(+)의 값을 가진다.

23) 본 연구에서 채택하고 있는 즉각 균형(temporal equilibrium)보다 확장된 형태의 균형 개념인 동태적 균형(inter-temporal equilibrium)을 채택하는 경우 우리는 각 시점에서 즉각 균형의 시계열 또는 즉각 균형의 운동방정식(law of motion)을 도출하게 된다(De La Croix and Michel[2002]). 다시 말해 본 연구의 경우 동태적 균형은 각 시점에서의 즉각 균형자본 축적량의 시계열 $\{K_t^*\}$, 또는 자본 축적량의 운동방정식

식 (18)과 식 (19)의 구조상 균형자본량과 위험자산의 균형 기대수익률에 대한 명시적 해를 도출하는 것이 여의치 않으므로 이하에서는 주로 자본공급함수와 수익함수의 수학적 특성에 맞추어 도표를 활용하여 균형해의 특성에 대한 정성적 분석에 초점을 맞춘다.

먼저 자본수요함수와 공급함수의 형태적 특징에 대하여 살펴본다.

[명제 1] 자본수요 K_t^d 는 위험자산 기대 수익률 $E_t[z_{t+1}]$ 의 감소함수이다. 즉,

$$\frac{dK_t^d}{dE_t[z_{t+1}]} < 0 \text{이다.}$$

증명) [부록 B]를 참고하시오.

[명제 2] 자본공급 K_t^s 는

$$(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2) \geq \kappa w_t(1 - s_t - \eta)$$

인 경우 위험자산 기대수익률

$0 = f(K_{t+1}^*, K_t, A_{t+1})$ 의 형태로 표현된다. 한편, 장기적 동태균형인 균제상태(steady state)를 도출하기 위해서는 인구($\{q_t\}$) 및 총요소생산성($\{A_t\}$)의 변동에 따른 비정상성(non-stationarity)을 해소할 필요가 있다. 따라서 균형자본 축적량을 비롯한 주요 관심 변수를 유효 노동력($A_{t+1}^{1/(1-\theta)}q_{t+1}$)으로 나누어 주는 규모 재조정(re-scaling) 작업이 필요하며 동태적 균형 또한 새로이 규모 재조정된 변수의 형태로 다시 정의되어야 한다. 확률적 요인이 존재하지 않는 모형(deterministic model)에서는 규모 재조정된 변수의 운동방정식이 가지는 고정점(fixed point)을 찾는으로써 균제상태에서 각 변수들이 취하는 값을 구하는데 이들이 바로 장기적 동태균형이다. 그러나 본 연구에서와 같이 특정 변수에 불확실성이 도입된 확률적 모형(stochastic model)의 경우 내생변수의 운동법칙으로부터 고정점을 찾는 것은 더 이상 의미를 가지지 못하므로 다른 형태의 균제상태를 정의하여야 한다. 확률적 동태모형에서 가장 널리 받아들여지고 있는 균제상태의 개념은 내생변수, 우리의 경우 규모 조정된 자본 축적량의 확률분포가 일정한 불변균형분포(invariant distribution) $\mu(k)$ 를 가지는 경우 이를 균제상태로 정의하는 것이다.

$$\mu(k) = \int_{k' \in S} P(k, k') \mu(dk')$$

위에서 $P(k, k')$ 는 자본 축적량이 k' 에서 k 로 바뀌게 될 확률을 표시하는 전이확률밀도함수(transition probability density function)이며, S 는 자본 축적량이 값을 취할 수 있는 상태 공간(state space)이다.

Stokey, Lucas and Prescott(1987)와 Wang(1993)은 확률변수가 compact set에서 정의되는 경우 위에 제시된 불변균형분포 $\mu(\cdot)$ 이 존재하며 유일(unique)하다는 것을 논증하고 있으나 본 연구와 같이 무한(unbounded) 상태 공간($\epsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma^2)$)에 대하여 정의된 경우에는 별도의 논증이 필요하다. 여러 번 언급한 바와 같이 본 연구에서는 즉각적 균형(temporal equilibrium)에만 관심을 기울일 뿐 동태적 균형(inter-temporal equilibrium)이나 불변균형분포(invariant distribution)의 존재 여부나 구체적인 형태에는 관심을 두지 않는다. 본 연구에서 관심의 대상을 즉각 균형 이상으로 확대하지 않는 가장 큰 이유는 균형 자본 축적량(k_t^*)의 운동방정식이 $0 = g(k_{t+1}^*, k_t, A_{t+1})$ 과 같은 음함수(implicit function)의 형태로 표현될 뿐이며, 불변균형분포 역시 존재나 유일성의 조건을 확인할 수 있을 뿐 명시적인 형태를 구하기 어렵기 때문이다. 이는 가능한 한 간단한 구조를 가진 모형의 분석을 통하여 명시적인 해를 도출하고 그 특성을 고찰한다는 본 논문의 작성 동기와 배치되는 것이다. 물론 불변균형분포의 경우 명시적인 해를 구하기는 어렵다고 하더라도 경우에 따라서는 평균 또는 분산의 변동 등과 같은 불변균형분포의 일정 측면을 모형의 기타 모수와 연관 짓는 것이 가능한 경우 분석의 실익이 있을 것이나 이마저도 현실적으로 충분히 의미 있는 분석적 결과를 도출하는 것이 가능하지 않다는 점을 밝혀둔다.

$E_t[z_{t+1}]$ 의 증가함수, 즉 $\frac{dK_t^s}{dE_t[z_{t+1}]} \geq 0$ 이며, 반대인 경우 위험자산 기대수익률 $E_t[z_{t+1}]$ 의 감소함수, 즉 $\frac{dK_t^s}{dE_t[z_{t+1}]} < 0$ 이다.

증명) [부록 B]를 참고하십시오.

[명제 1]로부터 다른 재화의 경우와 마찬가지로 자본수요는 가격인 위험자산의 기대수익률이 상승할수록 감소한다는 사실을 확인할 수 있다. 한편, [명제 2]에 의하면 자본공급함수가 가격인 위험자산 기대수익률의 증가함수가 되기 위해서는 일정한 조건이 필요함을 알 수 있는데, 할인율 β 가 지나치게 높지 않거나 총요소생산성의 변동성 σ^2 이나 공적연금의 소득대체율 η 이 충분히 높은 경우 이러한 조건이 만족될 가능성이 높아짐을 확인할 수 있다.

[명제 3] 위험자산의 기대수익률이 커짐에 따라 자본공급함수의 기울기는 0에 수렴한다. 즉, $\lim_{E_t[z_{t+1}] \rightarrow \infty} \frac{dK_t^s}{dE_t[z_{t+1}]} = 0$

증명) [부록 B]를 참고하십시오.

이상을 바탕으로 다음과 같이 유일한 균형해의 존재를 증명할 수 있다.

[명제 4] $(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2) \geq \kappa w_t(1 - s_t - \eta)$ 이며 $g_{t+1}^p < (\kappa[\theta A_t]^{1-\theta} + 1)$ 인 경우 유일한 균형자본량 K_t^* 과 위험자산의 균형 기대수익률 $E_t^*[z_{t+1}]$ 이 존재한다.

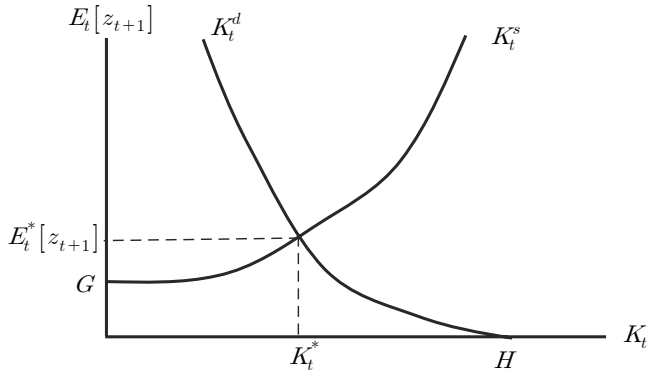
증명) 식 (19)에 의하면 자본수요는 위험자산 기대수익률의 감소함수이다. 또한,

$$\lim_{E_t[z_{t+1}] \rightarrow 0} K_t^d = [\theta A_t q_{t+1}^{1-\theta}]^{\frac{1}{1-\theta}} \equiv H$$

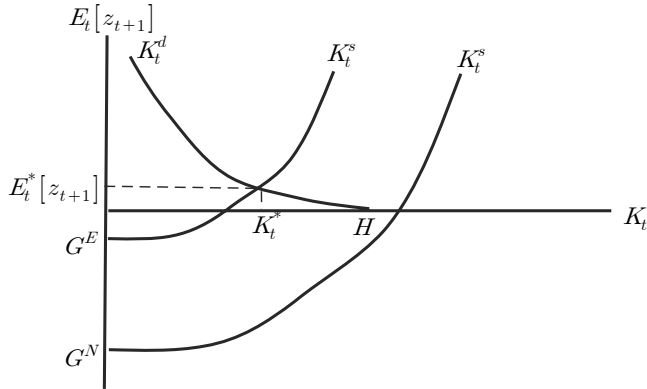
며, $\lim_{E_t[z_{t+1}] \rightarrow \infty} K_t^d = 0$ 임을 확인할 수

있다. 한편, 주어진 조건과 [명제 2]에 의하여 자본공급함수는 위험자산 기대수익률의 증가함수이다. 한편, 식 (16)에 의하면 $E_t[z_{t+1}] = r_{t+1}$ 인 경우 청년기에 공적연금 기여분을 제외한 가처분소득 $(1 - s_t)w_t$ 전부를 소비하기 때문에 자본공급이 0이 된다. 이 조건을 식 (17)에 대입한 다음 위험자산 기대수익률 $E_t[z_{t+1}]$ 에 대하여 정리하면 $E_t[z_{t+1}] = -\ln\beta - \kappa w_t(1 - s_t - \eta) \equiv G$ 의 조건을 얻을 수 있다. 한편, [명제 3]에 따르면 자본공급함수의 기울기는 0에 수렴한다. 만약 $G \geq 0$ 라면 [그림 1]에서와 같이 자본시장에서 거래되는 위험자산의 균형거래량과 균형 기대수익률이 유일하게 존재함을 확인할 수 있다. 그러나 $G < 0$ 인 경우 [그림 2]에서와 같이 균형이 존재하지 않을 수도 있다. 그러나 주어진 조건

[그림 1] An Equilibrium in Capital Market when $G \geq 0$



[그림 2] An Equilibrium in Capital Market when $G < 0$



$(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2) \geq \kappa w_t(1 - s_t - \eta)$ 에 따라 $g(0; \Theta) \geq -\sigma^2$ 이 성립하며 이를 변형하면 $\frac{q_t}{\kappa} \geq -q_t \frac{g(0; \Theta)}{\kappa \sigma^2}$ 의 관계를 얻는다. 한편, $g_{t+1}^p < (\kappa [\theta A_t]^{1-\theta} + 1)$ 에 의하여 $\frac{q_t}{\kappa} < [\theta A_t q_{t+1}^{1-\theta}]^{\frac{1}{1-\theta}}$ 의 관계가 성립한다. 두 부등식을 종합하면

$-q_t \frac{g(0; \Theta)}{\kappa \sigma^2} \leq \frac{q_t}{\kappa} < [\theta A_t q_{t+1}^{1-\theta}]^{\frac{1}{1-\theta}}$ 의 관계가 성립함을 알 수 있는데 부등호의 가장 왼쪽 항과 오른쪽 항은 각각 위험자산의 기대수익률이 0인 경우 자본의 공급량과 수요량과 일치한다. 이 경우 [그림 2]에서 보는 바와 같이 반드시 유일한 균형이 존재한다. ■

한편, 자본공급함수인 식 (18)로부터 위험자산의 기대수익률과 무위험자산의 수익률 간의 차이로 정의되는 위험 프리미엄(risk premium)이 균형자본 축적량 (K_t^*) 및 금기의 경제활동인구(q_t), 그리고 기타 모수에 대해 다음과 같은 함수 관계를 가짐을 알 수 있다.

$$E_t[z_{t+1}] - r_{t+1} = \kappa \sigma^2 \frac{K_t^*}{q_t} \quad (20)$$

따라서 위험 프리미엄은 총요소생산성의 변동성 σ^2 이 클수록, 절대적 위험회피도 κ 가 클수록, 균형자본 축적량 K_t^* 이 클수록 증가하는 반면 경제활동인구 q_t 가 증가할수록 낮아지는 경향이 있다. 이는 σ^2 이 위험자산 투자에 따른 본질적인 위험지표이며 κ 는 위험을 피하고자 하는 성향을 나타내는 것임을 감안하면 매우 직관적인 결과이나 K_t^* 와 q_t 의 영향에 관한 결과는 추가적인 해석을 필요로 하는 대목이다.

먼저, 균형자본량 K_t^* 와 위험 프리미엄 $E_t[z_{t+1}] - r_{t+1}$ 사이에 존재하는 정(+)의 관계는 높은 수준의 위험 프리미엄

이 높은 수준의 자본스톡을 지지하는 유인이 되기 때문으로 해석할 수 있다.²⁴⁾ 다음으로 경제활동인구는 위험 프리미엄과 부(-)의 관계를 갖는 것으로 나타나는데, 이는 위험자산 및 무위험자산시장에서의 미래 수익률이 현세대와 다음 세대 간의 경쟁이 아니라 현세대 내부의 경쟁 관계에 영향 받고 있음을 시사한다.²⁵⁾ 여기서 주의할 점은 다음 세대의 존재가 차기 자산 수익률에 영향을 미치지 못한다는 의미가 아니며, 현세대의 개인들이 받아들여야 하는 외부환경의 일부로 인식된다는 것이다. 보다 구체적으로 위험자산의 경우 일정한 투자의 회임기간이 필요한 생산기술에 의거하여 자본스톡의 총량 K_t^* 은 현재의 청년 세대가 결정하지만 그러한 결정을 내리기 위하여 현재의 청년 세대가 고려하는 투자의 미래 수익률 z_{t+1} 은 현재의 청년 세대가 선택한 투자량 K_t^* , 다음 세대의 노동공급 q_{t+1} 및 생산성 충격 ϵ_{t+1} 등에 의하여 외생적으로 주어진다는 의미이다.

또한, 현재 청년층인구 q_t 의 증가는 1차적으로 자본공급량 K_t^* 을 증가시켜 위험 프리미엄 $E_t[z_{t+1}] - r_{t+1}$ 을 감소시

24) 물론 이와 같은 해석은 인과관계의 방향을 앞서의 σ^2 및 κ 의 경우와 반대로 해석하는 것이라는 점에서 엄밀한 해석이 될 수는 없다. 하여튼 이와 같은 결과가, 비록 여기에서 더 이상의 논의를 전개하지는 않으나, 일인당 자본 축적이 가장 높은 수준인 미국을 제외하고는 위험 프리미엄의 크기가 작거나 때로는 음(-)의 값을 갖는 것으로(equity discount puzzle) 드러난 현실과 어떤 관련을 갖는지 파악하는 것도 대단히 흥미로운 작업이 될 것이다.

25) 이 경제는 무위험자산시장의 경우와 마찬가지로 위험자산시장의 수요와 공급이 전적으로 청년층에 의하여 이루어지는 구조이다.

키는 방향으로 작용하는데, 위에서 언급한 q_t 와 $E_t[z_{t+1}] - r_{t+1}$ 의 관계가 바로 여기에 해당한다. 한편, 감소된 위험 프리미엄 $E_t[z_{t+1}] - r_{t+1}$ 는 다시 자본공급량 K_t^s 을 감소시키고 그에 따라 위험 프리미엄이 증가하는 2차적인 효과가 나타나는데, 이는 우하향하는 자본스톡수요함수로 인한 결과이다. 따라서 청년층 인구의 증가가 위험 프리미엄에 미치는 순효과는 이상에서 논의한 두 가지 효과를 종합한 순효과에 의하여 결정되는데, 전자가 후자를 항상 압도하는 관계로 경제활동인구의 증가가 위험 프리미엄을 감소시키는 방향으로 작용하게 되는 것이다.²⁶⁾

3. 비교정태분석

본 절에서는 모형의 환경을 구성하는 외생변수나 파라미터(parameter)가 변하는 경우 경제의 균형이 어떻게 반응하는지를 살펴보기 위하여 비교정태분석(comparative static analysis)을 실시한다. 이하에서는 논의의 편의를 위하여 [명제 4]의 조건, 특히 [그림 1]의 경우가 성립한다는 가정을 유지한다.

가. 청년층인구의 감소

고령화의 진전과 동일한 의미로 해석할 수 있는 청년층인구의 감소는 자본스톡의 수요와 공급 양측에 시차를 두고 영향을 미친다. 금기의 청년층인구 q_t 는 자본공급에 영향을 주는 반면 다음 기 청년층인구 q_{t+1} 는 자본수요에 영향을 준다.

[명제 5] 무위험 이자율이 금기의 청년층인구에 대한 감소함수인 경우 $\left(\frac{\partial r_{t+1}}{\partial q_t} \leq 0\right)$, 금기의 청년층인구 감소는 균형자본량의 하락과 위험자산 기대수익률의 상승을 결과한다.

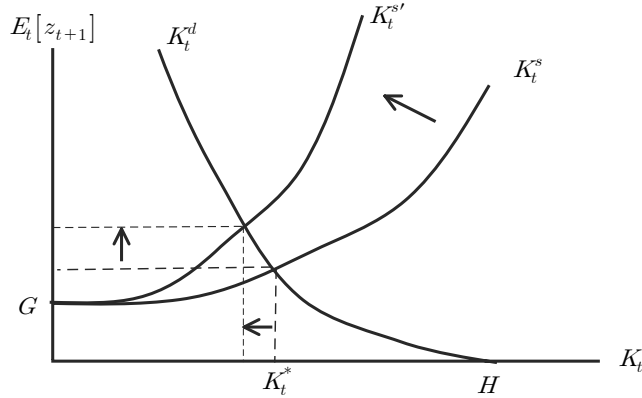
증명) 식 (19)로부터 금기의 청년층인구 수 q_t 의 변화가 자본수요에 영향을 미치지 않음은 쉽게 확인할 수 있다. 한편, 식 (18)과 주어진 조건으로부터 금기의 청년층인구 수 q_t 의 감소(증가)는 자본의 공급곡선을 좌(우)측으로 이동시킨다는 사실을 확인할 수 있다.²⁷⁾

$$\frac{\partial K_t^s}{\partial q_t} = \frac{E_t[z_{t+1}] - r_{t+1}}{\kappa\sigma^2} - \frac{q_t}{\kappa\sigma^2} \frac{\partial r_{t+1}}{\partial q_t} > 0$$

$$\frac{\partial K_t^d}{\partial q_t} = 0$$

26) 여기에 대한 보다 자세한 논의는 다음 절의 인구증가에 대한 비교정태분석 결과를 참조하기 바란다.
 27) 좀 더 엄밀히 말하면 금기의 청년층인구 증가는 자본의 공급곡선이 수직축의 절편을 중심으로 시계방향으로 회전이동하도록 만든다.

[그림 3] The Effect of Decreasing Current Young Workers on the Current Capital Market Equilibrium



따라서 [그림 3]에 제시된 것과 같이 금기의 청년인구 수 감소는 균형자본량의 하락과 위험자산 기대수익률의 상승을 결과한다. ■

[명제 5]의 도출과정에서 쉽게 확인할 수 있는 바와 같이 $\frac{\partial r_{t+1}}{\partial q_t} < 0$ 는 금기의 청년인구 감소로 인하여 자본스톡이 감소하기 위한 충분조건이며, $\frac{\partial r_{t+1}}{\partial q_t} \geq 0$ 인 경우에도 금기의 청년인구 감소로 인하여 자본스톡이 감소하는 현상이 발생할 가능성은 존재한다. 한편, 금기의 청년층인구와 무위험 이자율 간의 관계를

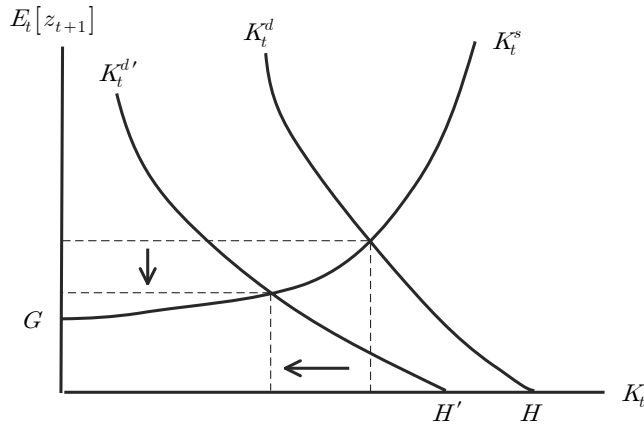
좀 더 자세히 살펴보기 위하여 식 (17)에 제시된 무위험 이자율을 금기의 청년층인구에 대하여 편미분하면 식 (21)과 같은 결과를 얻는다.

식 (21)에 의하면 금기의 청년인구의 증가로 인한 임금하락이 지나치게 빠르게 발생하지 않을 경우 금기의 청년인구 증가는 무위험 이자율의 하락을 결과함을 확인할 수 있다.

한편, 다음 기의 청년층인구 변화는 다음에서 확인할 수 있는 바와 같이 자본의 한계생산성에 영향을 줌으로써 자본 수요를 변화시킨다.

$$\frac{\partial r_{t+1}}{\partial q_t} = \frac{-2\kappa\sigma^2\left((1-\eta)\frac{\partial w_t}{\partial q_t} + \frac{\eta w_{t-1}q_{t-1}}{q_t^2}\right)}{\sqrt{(E_t[z_{t+1}] + 2)^2 + 2\sigma^2\left(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\right) - 2\kappa w_t\sigma^2(1-s_t-\eta)}} \quad (21)$$

[그림 4] The Effect of the Decreasing Next Generation Young Workers on the Current Capital Market Equilibrium



[명제 6] 다음 기의 청년인구 감소는 균형 자본량의 감소와 위험자산 기대수익률의 하락을 결과한다.

측으로 이동하여 균형자본량은 감소하고 위험자산에 대한 균형 기대수익률은 하락함을 확인할 수 있다.■

증명) 식 (18)과 식 (19)로부터 다음 기의 청년인구 수 q_{t+1} 의 증가(감소)가 자본수요를 증가(감소)시키고 자본공급에 영향을 주지 않는다는 사실을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\frac{\partial K_t^s}{\partial q_{t+1}} = 0$$

$$\frac{\partial K_t^d}{\partial q_{t+1}} = [\theta A_t \exp(-E_t[z_{t+1}])]^{\frac{1}{1-\theta}} > 0$$

따라서 다음 기의 청년인구가 감소하는 경우 [그림 4]에서 자본공급곡선은 변하지 않는 반면 자본수요곡선은 좌

이상의 논의를 간단히 종합하면 금기의 청년층인구 감소는 균형자본 축적량 K_t^* 의 감소와 위험자산의 균형 기대수익률 $E_t^*[z_{t+1}]$ 의 상승을 가져오는 반면, 다음 기 청년층인구의 감소는 균형자본 축적량의 감소 및 위험자산의 균형 기대수익률 하락을 결과한다.

이상의 분석 결과는 지속적인 청년층인구의 감소로 파악할 수 있는 고령화 현상, 즉 $q_{t+1}/q_t = \nu_t$ ($0 < \nu_t < 1$)이 자본 축적 및 금융시장에 미치는 영향에 대한 해답을 제시한다. 우선 고령화의 심화가 자본 축적량의 감소를 결과함은 명백하다.²⁸⁾ 그러나 위험자산에 대한 기대수익

률은 고령화의 진전속도에 따라 다른 방향으로 전개된다. 고령화가 가속화되는 과정($\frac{dv_t}{dt} < 0$)에서는 수요 측면에서 발생하는 효과가 공급 측면에서 발생하는 효과를 압도하여 위험자산의 기대수익률이 감소²⁹⁾하게 되는 반면, 고령화가 진전되는 국면($\frac{dv_t}{dt} > 0$)에서는 공급 측면의 효과가 수요 측면의 효과를 압도하여 위험자산의 기대수익률이 증가하게 된다.³⁰⁾

고령화의 진전이 위험 프리미엄에 미치는 영향에 대하여 기존의 연구(Poterba [2001], Books[2003])에서 많은 논의가 이루어져 왔는데, 다음의 [명제 7]을 통하여 위험 프리미엄의 증감이 고령화의 진전속도와 매우 밀접한 관련을 가지고 있음을 확인할 수 있다.

[명제 7] 무위험자산의 수익률 r_{t+1} 은 위험자산의 기대수익률 $E_t[z_{t+1}]$ 의 증가 함수(increasing function)이며, $(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2) \geq \kappa w_t(1 - s_t - \eta)$ 인 경우 그 변화속도가 위험자산 수익률의

변화속도에 비하여 크지 않다.

증명) 본 명제는 [명제 2]를 증명하는 과정에서 이미 증명되었다. 자세한 내용은 [부록 B]를 참고하십시오.

[명제 7]의 조건이 만족되는 경우 경제에 유일하고 안정적인 즉각 균형(temporal equilibrium)이 존재한다. 이 경우 위험자산의 기대수익률이 상승할 때 무위험자산의 수익률 역시 상승하지만 상승속도가 상대적으로 느려 위험 프리미엄이 확대된다는 사실을 확인할 수 있다. 따라서 본 논문에서 논의되는 모형은 고령화가 가속화되는 기간에는 위험 프리미엄(risk premium)이 줄어드는 반면 고령화가 진전되는 기간에는 위험 프리미엄이 늘어나는 모습을 보인다는 이론적 예측을 제시하고 있다.

나. 연금을 통한 소득이전의 증가

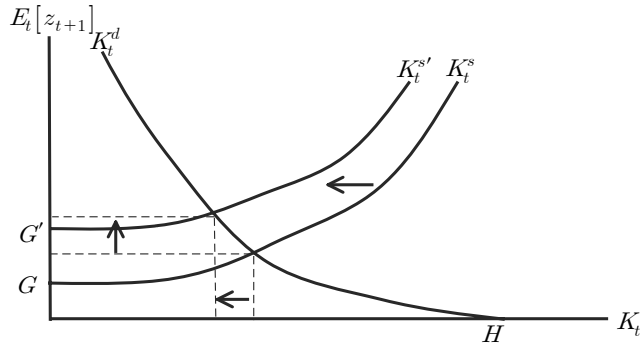
정부가 노인층의 은퇴 후 소득증대를

28) 총량 차원에서 자본 축적량의 감소는 소비자의 생애효용, 즉 후생이 감소하였음을 시사한다.

29) 이 같은 결과는 적어도 부과방식 공적연금이 운영되는 경우 소위 자산시장의 붕괴(melting-down) 현상이 고령화가 가속화되는 시점에서 관측될 가능성이 큼을 시사한다. 또한, 위험자산 수요의 감소(자본스톡공급의 증가)에 대응하여 위험자산의 공급(자본스톡수요의 감소)이 감소되는 현상은 위험자산 기대수익률의 하락이 예상과는 달리 심각한 수준에 이르지는 않을 수 있을 가능성을 시사한다.

30) 원칙적으로 자산시장 붕괴 가설은 연금제도의 운영방식과 관계없이 고령화의 급속한 진전에서 파생되는 문제라는 맥락에서 제시된 것이다. 다만, 부과방식보다는 적립방식 공적연금을 운용하는 경우 고령화의 진전 시 자산시장 붕괴가 발생할 가능성이 더욱 높아지는 정도의 차이는 있을 것이다. 따라서 이 상에서 제시된 분석 결과가 적립방식 연금을 운용하는 경우에도 일정 정도 시사점을 제공할 수 있을 것으로 판단된다.

[그림 5] The Effect of Increasing Transfer by the Public Pension Program on the Capital Market Equilibrium



위하여 공적연금의 소득대체율을 높이는 방향으로 연금제도를 조정하는 경우 부과방식의 연금 특성상 소득대체율은 높아질 수밖에 없다. 공적연금을 통한 소득 이전의 증가는 연금납입률 s_t 와 소득대체율 η 의 합이 증가하는 현상으로 표현할 수 있다.

[명제 8] 공적연금에 의한 이전소득규모 $(s_t + \eta)$ 의 증가로 인하여 균형자본량은 감소하고 위험자산에 대한 균형 기대수익률은 상승한다.

증명) 식 (18)과 식 (19)로부터 다음의 관계를 도출할 수 있다.

$$\frac{\partial K_t^s}{\partial (s_t + \eta)} = -\frac{q_t}{\kappa \sigma^2} \frac{\partial r_{t+1}}{\partial (s_t + \eta)} < 0$$

$$\frac{\partial K_t^d}{\partial (s_t + \eta)} = 0$$

따라서 공적연금에 의한 소득이전의 증가로 말미암아 자본공급곡선이 좌측으로 이동하게 되고 그 결과 균형 자본량은 감소하고 위험자산에 대한 균형 기대수익률은 상승한다. ■

[그림 5]에서 자본공급곡선 K_t^s 가 좌측으로 이동하는 경우 새로운 자본공급함수 $K_t^{s'}$ 는 $E_t[z_{t+1}]$ 이 증가함에 따라 이전의 자본공급함수와 서로 근접해가지만 서로 만나지는 않는다. 그 이유는 자본공급곡선의 기울기가 연금을 통한 소득이전의 증가함수이지만 자본공급함수의 수직축 절편인 G 또한 연금을 통한 소득이전의 증가함수이기 때문이다. 부과방식으로 운영되는 확정급여형 공적연금의 도입 내지 강화는 청년층 소비자에게 미래 소비 수요에 대비하기 위한 저축유인의 감소와 동시에 위험 프리미엄으로 표시된 위험자산에 대한 투자유인의 증가,

즉 저축유인의 증가라는 서로 상반된 유인을 제공한다. 따라서 양자의 상대적 크기에 따라 위험자산에 대한 투자의 증감 여부가 결정되고 자본 축적량 증감 여부가 영향을 받게 될 것이다. 그러나 [그림 5]에 의하면 미래 소비에 대비하기 위한 저축유인의 감소효과가 상대가격의 변화로 인한 저축유인 증대효과를 압도하는 것으로 나타난다. 이러한 결과는 공적연금의 도입이나 강화로 인하여 저축이 감소되는 구축효과(crowding-out effect)의 크기가 저축의 양을 증대시키는 보험효과(insurance effect)를 압도한다는 선행연구의 일반적인 결론과 맥을 같이한다.

한편, 높은 자본 축적량은 경제활동 연령층 및 은퇴 연령층에게 각각 높은 수준의 임금소득과 연금수혜 혜택이 제공됨을 의미한다. 그러나 연금수혜 혜택의 증가만으로 개인의 투자성과를 포함한 고령층 소득이 높아지는 것을 보장하지는 않으므로 엄밀히 말해 높은 자본 축적량이 개인 혹은 사회 전체의 후생증대와 일대일 관계로 연결되지는 않는다.

이와 같은 한계에도 불구하고 본 연구에서는 논의의 단순화를 위하여 공적연금과 자본 축적 간의 관계에 초점을 맞추³¹⁾ 결과, 경제에 존재하는 금융자산만으로는 위험에 대한 완전한 헤징(hedging)이 불가능한 불완전(incomplete) 금융시장

하에서 공적연금의 도입 혹은 연금이전 소득규모의 증가는 저축에 대하여 부(-)의 구축효과(crowding effect)와 정(+)의 보험효과(insurance provision effect)를 동시에 발생시키며 전자가 후자를 각각 압도한다는 사실을 확인하였다.

IV. 모형의 확장

본 장에서는 제Ⅲ장에서 논의된 기본 모형이 어떤 방식으로 확장될 수 있는지에 대하여 논의한다. 기본모형은 여러 가지 방향으로 확장될 수 있으나 여기에서는 (i) 개인에게 신용제약이 추가적으로 부과되는 경우와 공적연금의 수급구조가 확정기여형 부과방식으로 전환되는 경우에 대하여 자세히 논의한다. 이에 더하여 공적연금의 수급구조를 부과방식이 아니라 적립방식으로 운용하는 경우 모형에 어떤 수정이 가해지는지에 대하여 간략히 논의한다.

1. 신용제약의 도입

금융시장의 불완전성(incompleteness)은 근본적으로 정보의 비대칭성 및 거래비용과 같은 마찰적 요인의 존재에 뿌리를

31) 엄밀하게 동태적 효율성(dynamic efficiency)을 논하는 수준이 아니라면, 장기적으로 자본 축적량과 사회 후생은 같은 방향으로 움직이는 것으로 볼 수 있을 것이다.

둔다. 따라서 현실에서 관찰되는 시장의 불완전성은 이론적 논의에서 자주 가정되는 바와 같이 비단 다양한 형태로 존재하는 위험에 비하여 이를 회피하기 위하여 사용가능한 수단인 자산의 개수가 부족한 현상만이 아니라 신용제약(credit constraints)과 같은 수량제약의 형태로도 나타나기도 한다. 특히 금융시장 발전이 낮은 단계에 머물러 있는 경제에서는 수량제약으로 인한 시장의 불완전성이 더 큰 비중을 차지하므로 여기에서는 앞에서 제시한 기본모형에 간단한 신용제약³²⁾을 부가하여 경제의 균형에 어떤 변화가 발생하는지 살펴본다.

신용제약을 도입하기 위하여 청년기를 살아가는 경제주체는 자신의 청년기 소득의 일정 비율 이상을 소비할 수 없다는 가정을 추가한다.

$$c_t^y \leq \lambda_t w_t \tag{22}$$

식 (22)에서 청년기의 소비상한비율을 결정하는 요인 λ_t 는 시점에 따라 다른 값을 가지는데 다음과 같은 제약을 만족

시킨다고 가정하자.

$$0 < \lambda_t \leq (1 - s_t) - \frac{E_t[z_{t+1}] - r_{t+1}}{\kappa \sigma^2 w_t} \tag{23}$$

식 (23)의 마지막 항은 신용제약 도입 이전 청년층의 평균소비성향에 해당한다. 따라서 식 (23)에 주어진 제약은 신용제약이 없는 경우의 청년층이 누리던 소비수준이 신용제약 도입 이후에는 신용제약을 위배하게 되어 소비가능집합(feasible consumption set)에 속하지 않음을 의미한다.³³⁾ 이러한 방식으로 신용제약을 도입한 것은 노동시장에 갓 진입한 청년층이 신용제약에 걸릴 가능성이 더 높다는 일반적인 상황을 염두에 둔 선택이다.

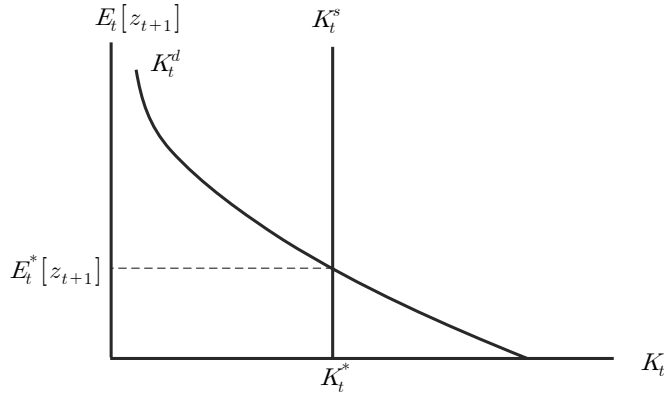
시점 t 에서 청년기를 살아가는 경제주체는 식 (2)에서 주어진 최적화 문제에 식 (22)와 식 (23)의 제약을 더하여 효용극대화를 달성하기 위하여 청년기의 소비와 저축, 즉 위험자산 보유량을 결정한다. 신용제약을 추가적으로 도입한 것

32) 이 경제의 균형상태에서 무위험자산의 총량은 항상 0이 된다. 따라서 여기서 사용되는 신용제약은 부채에 대한 상한(upper limit)을 설정하기보다는 저축에 대한 하한(lower limit)을 설정하는 것으로 이해할 수 있다.

33) 경제성장(자본 축적)과 더불어 임금수준이 높아지는 경우, 시간이 경과할수록 본 연구에서 가정한 절대 위험회피계수가 일정한 선호를 지닌 소비자가 청년기에 신용제약에 걸릴 가능성이 높아진다. 이는 신용제약이 없는 경우 아래에서 보는 바와 같이 개별 소비자의 청년기 소비함수의 평균소비성향 c_t^y/w_t 이 임금 w_t 의 증가함수이기 때문이다.

$$c_t^y/w_t = (1 - s_t) - (E_t[z_{t+1}] - r_{t+1})/\kappa w_t \sigma^2$$

[그림 6] A Capital Market Equilibrium under a Credit Constraint



이외에 모형의 구조는 이전과 동일하므로 다음과 같이 주어지는 자본시장, 즉 위험자산시장이 균형을 이루는 자본량과 위험자산 기대수익률 수준에 의하여 경제 전체의 균형이 달성된다.

$$K_t^s \equiv q_t (\lambda_t - s_t) w_t \quad (24)$$

$$K_t^d \equiv [\theta A_t q_{t+1}^{1-\theta} \exp(-E_t[z_{t+1}])]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (25)$$

$$K_t^d = K_t^s \quad (26)$$

한편, 청년층의 소비와 무위험자산 수

익률은 다음과 같이 표현된다.³⁴⁾

$$c_t^y = \lambda_t w_t, \quad 0 < \lambda_t < 1$$

$$r_{t+1} \leq E_t[z_{t+1}] - \kappa w_t \sigma^2 (1 - s_t - \lambda_t)$$

[그림 6]과 식 (24)에 의하면 자본공급 곡선 K_t^s 는 가격변수인 위험자산의 기대수익률과 무관하게 일정한 수준에서 결정되며,³⁵⁾ 금기 경제활동인구의 감소, 신용제약의 강화 및 연금납부율의 변동을 제외한 다른 요인의 변동에는 영향 받지 않는다.

금기의 경제활동인구 q_t 의 감소와 신용 제약의 강화, 즉 λ_t 의 하락 및 연금

34) 무위험자산의 수익률에 관한 부등식에서 보는 바와 같이 신용제약의 완화(λ_t 의 증가)는 직접적으로 소비를 늘리고 저축을 줄여 자본 축적을 감소시킨다. 물론 신용제약의 완화에 따른 소비증가가 기업의 투자 및 자본 축적을 촉진한다는 주장이 있으나 본 연구에서 제시된 모형에 의하면 신용제약 완화로 인하여 자본 축적이 감소되는 결과가 발생할 가능성이 매우 큼을 확인할 수 있다.

35) 따라서 자본스톡수요 K_t^d 가 기대수익률 $E_t[z_{t+1}]$ 을 결정하게 된다.

납부율 s_t 의 상승은 자본공급곡선 K_t^s 를 좌측으로 평행이동시킨다. 따라서 새로운 균형점은 이전에 비해 작은 자본 축적량 K_t^* 와 높은 위험자산 기대수익률 $E_t^*[z_{t+1}]$ 을 지지하게 된다.

다음으로 소득대체율 η_t 의 증가는 자본공급곡선 K_t^s 에 영향을 미치지 못한다. 이는 η_t 의 변화가 자본공급에 영향을 미치던 경로의 하나이던 무위험자산 수익률 r_{t+1} 이 더 이상 청년기 소비와 자본공급의 결정요인이 아니기 때문이다. 따라서 공적연금의 소득대체율이 변화하더라도 경제는 종전과 동일한 수준의 균형을 유지한다.

신용제약이 없는 경우 무위험자산보다는 위험 프리미엄 $E_t[z_{t+1}] - r_{t+1}$ 을 공적연금의 소득대체율이 자본공급에 영향을 미치는 경로로 파악할 수 있다. 이는 위험자산의 기대수익률이나 무위험자산의 수익률의 절대 수준이 아닌 양자 간 상대적 격차가 자본공급을 결정한다는 의미이다. 그러나 신용제약하에서는 공적연금의 소득대체율이 자본공급에 아무 영향을 미치지 못할 뿐 아니라 아예 무위험 이자율에도 아무런 영향을 미치지 못한다. 이러한 차이는 신용제약이 존재하

는 경우 무위험자산의 수익률이 경제 내의 기회비용을³⁶⁾ 제대로 반영하고 있지 못하기 때문에 일어나는 현상으로 해석된다.³⁷⁾

마지막으로 고령화의 진전과 관련하여서는 신용제약이 없는 경우에서와 마찬가지로 자본수요곡선 K_t^d 와 자본공급곡선 K_t^s 가 각각 금기의 청년층인구 q_t 와 다음 기의 청년층인구 q_{t+1} 의 선형함수 형태를 유지하므로 신용제약이 없는 경우와 동일한 비교정태분석 결과를 얻을 수 있다.

2. 확정기여형 부과방식 공적연금하의 균형조건

공적연금의 수급구조가 부과방식을 유지하되 확정기여형이 아니라 확정기여형 (defined contribution)을 취하는 경우 정부는 연금납입률 s_t 를 일정 수준에 고정하고 매기 연금수지를 맞추기 위해 다음과 같은 방식으로 소득대체율 η_{t+1} 을 조정한다.

36) 이를테면, 미래소비 한 단위의 현재 소비 한 단위의 교환비율을 기회비용으로 간주할 수 있다.

37) 앞서 도출한 $r_{t+1} \leq E_t[z_{t+1}] - \kappa w_t \sigma^2 (1 - s_t - \lambda_t)$ 의 부등식도 r_{t+1} 이 인위적인 신용제약으로 인해 잠재적 시장가격수준(‘=’를 만족시키는 수준)까지는 이르지 못하였음을 보여준다. 한편, λ_t 의 증가로 표현되는 신용제약의 완화는 무위험채권 수익률(r_{t+1})의 상한(upper boundary)을 높이는 한편, 위험 프리미엄의 하한(lower boundary)을 낮추게 된다. 이와 같은 결과는 신용제약의 완화가 이자율의 시장가격으로의 수렴을 촉진하는 방향으로 영향을 미치기 때문으로 해석된다.

$$\eta_{t+1} = \frac{sw_{t+1}q_{t+1}}{w_t q_t} = s \frac{1+z_{t+1}}{1+z_t} \frac{K_t}{K_{t-1}} \quad (27)$$

청년층 소비자의 입장에서 연금은 수익률의 평균과 분산이 다음과 같이 주어지는 확률변수, 즉 위험자산의 하나로 인식된다.

$$\begin{aligned} E_t \left[\frac{\eta_{t+1}}{s} - 1 \right] &= E_t [z_{t+1}] - z_t \\ &\quad + \ln K_t - \ln K_{t-1} \\ \text{Var}_t \left[\frac{\eta_{t+1}}{s} - 1 \right] &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (28)$$

따라서 위험자산으로서 공적연금의 수익률은 시장에서 거래되는 위험자산의 수익률 z_{t+1} 과 동일한 원천인 총요소생산성의 ϵ_{t+1} 에서 발생하는 동일한 크기

의 위험 σ^2 을 가진다. 이 경우 통상적으로 두 자산 중 평균 수익률이 높은 쪽에만 수요가 발생하지만 공적연금의 강제성으로 인해 이 같은 상황을 피할 수 있다.³⁸⁾

확정기여형 부과방식 수급구조를 가진 공적연금이 청년기를 살아가는 경제주체에게 위험자산의 하나로 인식되는 경우 노년기의 기대효용이 앞서 살펴본 확정기여형 부과방식 공적연금에 비하여 좀 더 복잡해진 형태를 띤다.

이미 도출한 공적연금자산이 위에 제시된 기대수익률과 분산을 가진 위험자산임을 고려하여 식 (2)에 주어진 개인의 최적화 문제를 풀면 다음과 같이 청년층의 소비수준³⁹⁾과 무위험자산 수익률을 구할 수 있다.

$$c_t^y = w_t - \frac{E_t [z_{t+1}] - r_{t+1}}{\kappa \sigma^2} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= - (2 + \sigma^2) \\ &\quad + \sqrt{(E_t [z_{t+1}] + 2)^2 + 2\sigma^2 (2 - \ln \beta + \frac{1}{2}\sigma^2) - 2\kappa w_t \sigma^2 (1 + s - s E_t [\eta_{t+1}/s - 1])} \end{aligned} \quad (30)$$

38) 공적연금의 기대수익률이 시장에서 거래되는 위험자산의 기대수익률보다 높아 공적연금에 대한 초과수요가 발생하더라도 공적연금에 대한 기대수익률이 높아져서 조정되는 것이 아니라 모든 청년기 경제주체에 대하여 연금수급 균형을 이루는 수준에서 동일한 금액만큼을 할당함으로써 해소된다. 반대로 공적연금의 기대수익률이 시장에서 거래되는 위험자산의 기대수익률보다 낮은 경우에는 공적연금에 대한 자발적 수요가 발생하지 않을 것이나 이 경우 역시 공적연금의 강제성에 의하여 공적연금의 예산 제약이 만족되는 수준에서 강제적으로 징수되고 배분된다.

39) 확정기여형의 경우와 비교하여 가처분소득 $(1-s_t)w_t$ 이 아닌 임금소득 w_t 이 청년층 소비함수 c_t^y 의 결정요인으로 나타난다. 이는 확정기여 방식연금하에서 청년층 소비자가 강제적이거나 연금을 조세가 아닌 투자수단으로 간주하고 있음을 의미한다. 이에 따라 청년층 소비자의 한계소비성향은 1이 된다.

식 (29)를 근거로 청년층 전체의 자본 공급량 K_t^s 을 자본의 기대수익률 $E_t[z_{t+1}]$ 의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$K_t^d = [\theta A_t q_{t+1}^{1-\theta} \exp(-E_t[z_{t+1}])]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (31)$$

$$K_t^s \equiv q_t((1-s)w_t - c_t^y) = q_t \left(\frac{E_t[z_{t+1}] - h(E_t[z_{t+1}]; \Theta)}{\kappa \sigma^2} - s w_t \right) \quad (32)$$

식 (31)에서

$$\begin{aligned} h(E_t[z_{t+1}]) &\equiv r_{t+1} \\ &= \sqrt{(E_t[z_{t+1}] + 2)^2 + 2\sigma^2(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2) - 2\kappa w_t \sigma^2(1 + s - s\mu_t) - (2 + \sigma^2)} \end{aligned}$$

이며

$$\mu_t \equiv E_t \left[\frac{\eta_{t+1}}{s} - 1 \right] = \frac{-\theta}{1-\theta} E_t[z_{t+1}] - z_t + \frac{1}{1-\theta} (\ln\theta + \ln A_t) + \ln q_{t+1} - \ln K_{t-1}$$

이다.

증명) [부록 B]를 참고하십시오.

[명제 9]에서 도출한 자본공급함수 K_t^s 와 자본수요함수 K_t^d 를 일치시켜 균형자본 축적량 K_t^* 와 위험자산의 균형 기대수익률 $E_t^*[z_{t+1}]$ 을 명시적인 해로 도출하는 것이 가능하다. 그러나 공급함수와 수요함수가 매우 복잡한 형태를 취하고 있으므로 균형해(equilibrium solution)를 직접 구하는 대신 확정기여형의 경우와 마찬가지로 그림을 이용한 정성적인 분석 결과를 제시한다. 단, 여기서는 확정급부

[명제 9] 부과방식 확정기여형 공적연금 하에서 자본수요함수와 자본공급함수는 각각 다음과 같이 주어진다.

형과 확정기여형 공적연금의 공정한 비교를 위하여 암묵적으로 $E_t[s_{t+1}] = s$ 및 $E_t[\eta_{t+1}] = \eta$ 를 가정한다. 이는 평균적으로 비교대상인 확정급부형 및 확정기여형 공적연금체제가 같은 수준의 부담률과 수혜율을 유지하고 있음을 의미한다.

확정기여형 부과방식 공적연금과 확정급부형 부과방식 공적연금은 자본공급함수 K_t^s 에 두 가지의 차이를 결과한다. 먼저 확정기여형 공적연금하에서

자본공급함수는 직접적으로 연금 납입액 sw_t 의 감소함수로 표현되지만 확정기여형 공적연금하에서는 그렇지 않다는 점을 지적할 수 있다. 이는 확정기여형 공적연금하에서 연금가입자가 공적연금을 위험자산의 하나로 인식한다는 점과 관련이 있다. 다음 기의 생산성 충격이 실현되는 값에 따라 연금수급액이 결정된다는 점에서 연금자산은 위험자산과 공통의 위험요인을 갖는다. 따라서 이와 같이 연금납입액이 위험자산에 대한 투자를 직접적으로는 완전히 구축하는 결과가 발생하는 것이다. 다음으로 무위험자산 수익률 r_{t+1} 을 결정하는 식 (17)과 식 (30)을 비교해 보면, 확정기여형 공적연금하에서는 $-(s_t + \eta)$ 가 나타나는 반면 확정기여형 공적연금하에서는 $s - s\mu_t$ 로 나타나는 차이를 확인할 수 있다. 이러한 차이가 의미하는 바를 파악하기 위하여

[명제 9]에 제시된 확정기여형 공적연금의 기대수익률을 무위험자산의 수익률 결정식에 대입한 후 이를 점검하면 제공근 기호 내부는 위험자산 기대수익률 $E_t[z_{t+1}]$ 에 대하여 2차함수 형태를 취하고 있는 것을 알 수 있다. 물론 확정기여형 공적연금하에서도 무위험 이자율을 결정하는 식의 제공근 내부가 위험자산 기대수익률에 대하여 2차함수 형태를 취한다는 사실은 식 (17)을 통하여 쉽게 확인할 수 있다. 그러나 두 가지 서로 다른 수급구조의 공적연금하에서 무위험 이자율 r_{t+1} 의 최솟값과 그에 대응하는 위험자산 기대수익률 $E_t[z_{t+1}]$ 수준은 다를 것이다. 구체적인 논의를 위하여 무위험 이자율을 결정하는 식 (17)과 식 (30)의 제공근 내부를 다음과 같은 새로운 함수로 정의하자.

$$f(E_t[z_{t+1}]) = (E_t[z_{t+1}] + 2)^2 + 2\sigma^2\left(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\right) - 2\kappa w_t \sigma^2(1 - s_t - \eta)$$

$$F(E_t[z_{t+1}]) = (E_t[z_{t+1}])^2 + 2\left(2 - \frac{\theta \kappa w_t \sigma^2}{1 - \theta}\right)E_t[z_{t+1}] + A$$

한편,

$$A = 4 + 2\sigma^2\left(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\right) - 2\kappa w_t \sigma^2\left(1 + s\left(1 + z_t - \frac{1}{1 - \theta} - \ln q_{t+1} + \ln K_{t-1}\right)\right) \text{이다.}$$

함수 f 는 $E_t[z_{t+1}] = -2$ 에서 최솟값 $2\sigma^2\left(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\right) - 2\kappa w_t \sigma^2(1 - s_t - \eta)$ 을 가지는 반면 함수 F 는 $E_t[z_{t+1}] = -2 + s\kappa w_t \sigma^2 \frac{\theta}{1 - \theta}$ 에서 최솟값

$-\left(\frac{\theta k w_t \sigma^2}{1-\theta}\right)^2 + A$ 을 가진다. 40) 최소점의 차이는 자본공급곡선을 상하로 이동시키는 역할을 하며 최솟값의 차이는 자본공급곡선을 좌우로 이동시키는 역할을 한다. 따라서 확정기여형 부과방식 공적연금하의 자본공급곡선은 확정기여형 부과방식 공적연금하의 자본공급곡선에 비하여 위험자산 기대수익률 $E_t[z_{t+1}]$ 축에 대하여 $s k w_t \sigma^2 \frac{\theta}{1-\theta}$ 만큼 상향이동한 위치에 존재한다. 그러나 함수 f 와 F 의 최솟값 중 어느 쪽이 더 큰지 여부를 일의적으로 판단할 수 없으므로 자본공급곡선이 자본량 축을 따라 좌우 어느 쪽으로 이동하는지는 결정할 수 없다. 만약 확정기여형 부과방식 공적연금하의 자본공급곡선이 확정기여형 부과방식 공적연금하의 자본공급곡선에 비하여 자본량 축을 따라 좌측으로 이동하는 경우 확정기여형 부과방식 공적연금하의 균형 자본량은 확정기여형 부과방식 공적연금하의 균형자본량에 비하여 낮은 수준에서 결정되며 위험자산의 균형 기대수익률의 경우 높은 수준에서 결정된다. 반면, 자본공급곡선이 자본량 축을 따라 우

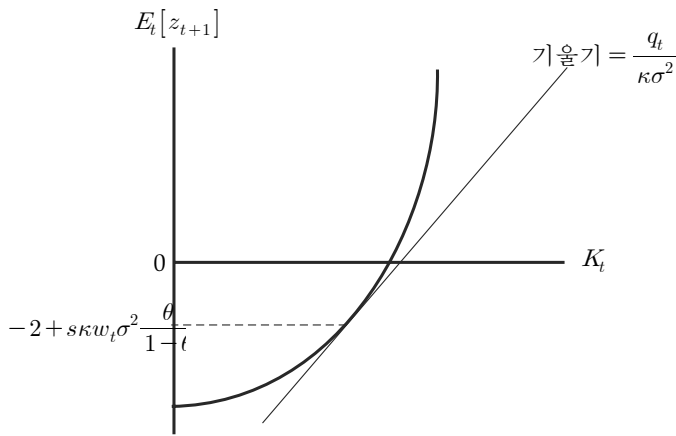
측으로 이동하는 경우에는 이 효과가 최소점의 상향이동에 따른 효과 및 연금자산의 일대일 구축효과와의 합과 비교하여 크지 않은 이상 앞서와 동일한 결과를 갖게 된다.

이상의 논의를 간략히 정리하면 확정기여형 부과방식 공적연금에 비하여 확정기여형 부과방식 공적연금의 자본 축적에 대한 구축(crowding out)효과가 상대적으로 더 큰 것으로 판단되는데, 이는 확정기여방식하에서 공적연금이 민간저축의 규모를 감소시키는 효과(규모의 구축효과)에 더하여 위험자산에 대한 투자 비중을 감소시키는 효과(구성의 구축효과)를 모두 가지기 때문으로 판단된다.

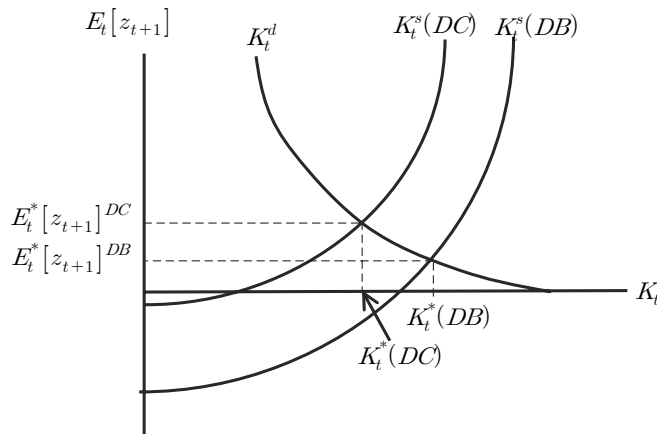
지금까지 확정기여형 및 급부형 연금제도의 효율성 비교 논의는 다양한 형태로 전개되어 왔으며, 그중 일부를 소개하면 다음과 같다. 먼저, Bohn(2001)과 Sanchez-Marcos and Sanchez-Martin(2006)은 부과방식하에서 인구구조의 불확실성(생산성 충격은 도입되지 않음)을 도입하는 경우 확정기여형이 더 효율적이라는 결과를 제시하였다. 다음으로, Bovenberg and Uhlig(2006)의 경우에는 확정기여형

40) 유한책임(limited liability) 원칙에 의하면 위험자산에 대한 수익률의 하한은 -1이다. 따라서 위험자산의 기대수익률은 -1보다 작은 값을 가질 수 없다. 그럼에도 불구하고 위험자산의 기대수익률이 -1보다 작은 최소점에 주목하는 이유는 그 최소점에서 자본공급함수 K_t^* 의 기울기가 $\frac{q_t}{\kappa \sigma^2}$ 이며, 최소점보다 큰 높은 기대수익률에서는 기울기가 이보다 작은 양(+)의 값을, 최소점보다 낮은 기대수익률에서는 기울기가 이보다 큰 값을 가지기 때문이다. 즉, 자본공급함수 K_t^* 의 전체적인 모양이 위험자산 기대수익률의 최솟값을 중심으로 오목한(concave) 모습을 가지는 특성이 있음을 확인할 수 있다.

[그림 7] A Supply Schedule of Capital under a DC Program



[그림 8] Comparison of Capital Accumulations between a DB and a DC Public Pension Program



적립식 공적연금은 자본 축적을 구축하지 않고 위험공유(risk-sharing)가 가능하다는 결과를 제시하고 있다. 그리고 Abel(2001) 역시 확정기여형 적립방식 공적연금하에서 위험자산비중의 증가는 자

본 축적을 촉진하나 확정기여형 적립방식 공적연금하에서는 위험자산비중의 증가는 자본 축적을 저해한다는 결과를 도출하였다. 본 연구도 위 선행연구와 마찬가지로 확정기여형 연금제도가 (자본 축

적에 있어서) 보다 효율적임을 주장하고 있다. 다만, 주장을 도출한 구체적인 전제(연금제도의 형태나 생산성 충격 도입 여부)에서 이들과 차이를 두고 있다.

한편, 공적연금을 통한 소득이전의 증가나 고령화에 따른 경제활동인구의 감소가 발생하는 경우 확정기여형 부과방식 공적연금은 확정급여형 부과방식 공적연금의 경우와 동일한 비교정태분석 결과를 도출한다. 단, 공적연금을 통한 소득이전의 증가가 미치는 효과에 대해서는 다소의 추가적 설명이 필요하다. 확정기여형 연금하에서 연금납입률 s_t 의 상승에 따른 균형자본 축적량 K_t^* 및 위험자산 기대수익률 $E_t^*[z_{t+1}]$ 의 변화는 확정기여형에 비하여 최소점의 상향이동에서 s_t 가 기여하는 부분인 $-\kappa w_t \sigma^2 \frac{\theta}{1-\theta}$ 와 최솟값의 우측 평행 이동에서 s_t 가 기여하는 부분인 $2\kappa w_t \sigma^2$, 그리고 자본공급에 대한 일대일 구축효과인 $-w_t$ 의 함에 따라 결정된다. 자본의 소득분배율이 약 70% 정도인 점을 감안하여 $\theta = \frac{2}{3}$ 를 가정하면 $-\kappa w_t \sigma^2 \frac{\theta}{1-\theta} + 2\kappa w_t \sigma^2 \simeq 0$ 이므로 앞서 언급한 세 가지 효과를 합한 순효과와 $-w_t$ 에 의해 결정될 가능성이 높다. 따라서 확정기여형 부과방식 공적연금하에서 연금납입률 s_t 이 상승하는 경우 균

형자본 축적량 K_t^* 이 감소하고 위험자산의 기대수익률 $E_t^*[z_{t+1}]$ 이 상승할 가능성이 매우 높을 것으로 예측된다.

3. 적립방식 공적연금

현재 우리나라의 공적연금인 국민연금은 원칙적으로 적립방식(funded system)의 기금운용방식을 채택하여 운용되고 있다. 그러나 본 연구에서 제시된 이론적 틀(theoretical framework)을 적립방식으로 기금이 운용되는 경우에 적용하기에는 명백한 한계가 존재한다. 특히 공적연금의 운용방식이 경제에 미치는 영향에 대하여 과감한 추상화 및 단순화의 힘을 빌려 분석적인(analytic) 결과를 도출한다는 본 연구의 목적에 비추어 볼 때 적립방식의 공적연금을 분석하는 것은 그 난이도나 결과의 수용성 측면에서 많은 어려움이 존재한다. 그럼에도 불구하고 이하에서는 이후의 추가적인 연구 진전을 위하여 적립방식 공적연금을 본 연구에서 제시된 모형에 도입하기 위하여 어떤 종류의 수정이 필요할 것인지에 관하여 간략히 논의한다.

적립방식 공적연금(funded pension system)하에서는 공적연금의 존재 여부 및 운영방식뿐 아니라 기금자산의 운용 방법에 따라 경제에 미치는 영향이 달라진다. 특히, 적립된 기금규모가 국민소득

이나 자본시장 규모에 비하여 상대적으로 큰 규모가 될 정도로까지 성장할 때 기금자산이 금융시장에서 어떻게 분산 투자되는가에 따라 각종 자산의 시장수익률은 다른 양태를 보이게 되고, 이는 다시 개별 가계의 자산선택 행위에 영향을 줄 수 있다는 측면에서 적립방식 공적연금을 둘러싼 경제 내 각종 경제주체와 시장 간 상호관계를 분석하는 것은 어렵지만 굉장히 흥미로운 작업이다.

적립방식 공적연금을 전제로 하는 경우 연금운용방정식⁴¹⁾과 위험자산시장과 무위험자산시장의 균형조건이 앞서 부과방식모형과는 다른 모양을 취하게 된다.

가. 연금기금방정식⁴²⁾

$$W_t = W_{t-1}(\tau_t(1+z_t) + (1-\tau_t)(1+r_t)) + s_t w_t q_t - \eta_t w_{t-1} q_{t-1}$$

위에서 W_t 는 t 기 공적연금의 기금규모이며, τ_t 는 연금기금의 위험자산 보유비율을 나타낸다. τ_t 는 연금기금의 운용 주체에 의하여 외생적으로 결정되는 정책 변수이다.

나. 위험자산시장 균형조건

$$K_t = q_t((1-s_t)w_t - c_t^o) + \tau_t W_t$$

자본수요는 여전히 기업의 이윤극대화 결과로 도출되지만 자본공급은 이제 청년기를 살아가는 경제주체와 연금기금에 의하여 이루어진다.

다. 무위험자산시장 균형조건

$$0 = (1-\tau_t)W_t + q_t(1-\alpha_t) \left((1-s_t)w_t - c_t^y \right)$$

무위험자산시장은 적립방식 공적연금이 앞서의 부과방식 공적연금에 비하여 가장 큰 차이를 보이는 지점이다. 균형에서 무위험 자산의 순공급(net supply)이 0이라는 조건은 여전히 성립하지만 청년층이 무위험자산을 보유하거나 발행할 수 있다는 점은 부과방식 공적연금의 경우와 차이가 난다. 가령 공적연금이 적립금을 축적하고 있으며 이 중 일부를 무위험자산에 투자하는 경우, 즉 $W_t > 0$ 와 $0 < \tau_t < 1$ 인 경우 $q_t(1-\alpha_t) \left((1-s_t)w_t - c_t^y \right) < 0$ 가 성립되어야 하며, 이는 청년기 가치분소득이 청년기 소비에 비하여 많을 때 $\alpha_t > 1$, 즉 청년층이 무위험자산을 발행하게 됨을 의미한다. 적립식 공적연금이 존재하는 경우 균형에서도 청년층이 무위험자산을 보유하거나 발행하는 것이 가능한 것은 청년층과 다른 선호체계를 가진 공적연금이 무

41) 부과방식하의 연금운용방정식이 적립방식하에서는 연금기금방정식으로 바뀌어 불린다.

42) 납입률 s_t 와 소득대체율 η_t 의 관계는 확정급부형인지 확정기여형인지에 따라 다르게 정의된다.

위험자산 거래의 상대방으로서의 역할을 하기 때문이다.

그러나 적립식 연금을 모형에 명시적으로 도입하기 위한 이 정도의 변형(modification)만으로도 분석적인 결과는 물론 정성적인 결과의 도출이 어려워져⁴³⁾ 궁극적으로는 수치해석에 의존할 수밖에 없어진다.⁴⁴⁾ 따라서 여기에서는 앞서 도출한 확정급여형 부과방식 공적 연금을 분석한 모형의 균형조건식에 변형을 주는 방식으로 적립방식 공적연금의 도입에 따른 경제적 과급효과를 살펴본다.

확정급여형 방식의 부과방식 공적연금이 운용되는 경제에서 정부가 갑자기 현

재의 청년층이 노년기에 받게 될 연금부담률과 소득대체율을 높이는 상황을 가정하자. 즉, $s_t \rightarrow s'_t, \eta \rightarrow \eta', 0 < s_t < s'_t, 0 < \eta < \eta'$ 의 변화가 발생한다고 가정한다. 이 경우 t 기의 노인층에 지급되지 않고 남은 연금기금 적립금이 발생하게 되고 정부는 적립금을 운용하여 가치를 보존 내지는 증가시켜야 할 상황에 처하게 된다. 정부는 적립된 기금 중 τ 만큼을 위험자산에 투자하고 $(1 - \tau)$ 만큼을 무위험자산에 배분하여 투자한다고 가정하자.

이에 따라 자본수요함수 K_t^d 및 자본공급함수 K_t^s 와 무위험자산 수익률 함수 r_{t+1} 는 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$K_t^d = [\theta A_t q_{t+1}^{1-\theta} \exp(-E_t[z_{t+1}])]^{\frac{1}{1-\theta}}$$

$$K_t^s \equiv q_t((1-s_t)w_t - c_t^y) = q_t \frac{E_t[z_{t+1}] - r_{t+1}}{\kappa \sigma^2} + \tau(s'_t - s_t)w_t$$

$$r_{t+1} = -2 - \sigma^2 + g(\tau(s'_t - s_t)w_t) + \sqrt{(E_t[z_{t+1}] + 2)^2 + 2\sigma^2(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2) - 2\kappa w_t \sigma^2 \{(1-s_t - \eta) - (s'_t - s_t) - (\eta' - \eta)\}}$$

위에서 우리가 주목할 점은 적립식 공적연금으로의 전환이 어떤 변화를 가져왔는가 하는 점이다. 먼저 자본공급함수 K_t^s 에 $\tau(s'_t - s_t)w_t$ 만큼의 직접적인 증가가 발생하는데 이는 적립된 기금자산

$(s'_t - s_t)w_t$ 의 일정 비율 τ 가 위험자산에 투자되는 데 기인한다.

다음으로 무위험자산 수익률 r_{t+1} 역시 연금기금 적립으로 인하여 바뀌게 되는데, 이는 다시 두 가지 요인으로 분리

43) 물론 적립방식을 가정한 모형에서도 균형조건식의 복잡성으로 인하여 명시적인 균형해를 구하는 것은 어려운 과제였다.

44) 수치해석방법을 동원한 적립방식 공적연금의 경제적 효과 분석은 허석균(2007)을 참고하시오.

할 수 있다. 첫째는 공적연금이 적립기금을 운용하는 데 따른 변화이고, 둘째는 연금부담률 및 소득대체율의 인상에 따른 변화이다. 먼저 적립기금 운용에 따른 변화는 기금의 일정 부분을 무위험자산의 형태로 보유함에 따라 민간의 무위험자산 총량을 0으로 만들던 부과방식의 무위험 자산시장 균형조건이 더 이상 성립하지 않는 데 기인한다. 공적연금의 무위험자산시장 참여는 무위험자산에 대한 수요를 $(1-\tau)(s_t' - s_t)w_t$ 만큼 늘리게 된다. 그러나 이로 인하여 늘어난 무위험자산 수요는 청년층이 연금납부액 증가분에 대응하기 위하여 늘린 무위험자산 공급량의 증가분 $(s_t' - s_t)w_t$ 을 어느 정도 상쇄하는 효과를 지닌다.⁴⁵⁾ 이러한 청년층의 노력에도 불구하고 해소되지 않는 무위험자산의 초과공급 $\tau(s_t' - s_t)w_t$ 은 무위험자산의 수익률 r_{t+1} 의 상승에 의해 해소될 것이다. 이와 같은 상황을 반영하는 것이 함수 $g(\cdot)$ 인데 $g(0) = 0$, $g'(x) \geq 0$ 의 특성을 보여 기금자산 중 위험자산의 보유비중이 높을수록 큰 값을 가지게 된다.⁴⁶⁾ 따라서 이 부분만을 놓고 볼 때

연금기금의 위험자산 보유비중이 높을수록 금리가 상승하여 자본스톡공급 K_t^s 이 감소할 것임을 예측할 수 있다. 연금기금 적립으로 인하여 무위험자산 수익률이 영향을 받는 두 번째 통로는 $2\kappa w_t \sigma^2 \{(s_t' - s_t) + (\eta' - \eta)\}$ 을 통하여 파악된다. 이 효과는 확정급여방식이 유지되는 가운데 연금부담률과 소득대체율이 조정되면서 발생하는 것인데 s_t 나 η 의 상승폭이 크면 클수록 무위험 이자율을 더 크게 하락시켜 자본공급 K_t^s 이 감소하는 효과가 더 클 것임을 의미한다.

적립식 공적연금으로의 전환이 균형자본 축적량 K_t^* 과 위험자산의 균형 기대수익률 $E_t[z_{t+1}]$ 에 미치는 영향은 앞서 언급한 세 가지 요인의 합에 의해 결정될 것이며 모형에 포함된 모수의 구체적인 값에 따라 다른 결과를 나타낼 것이다.⁴⁷⁾

45) 한편, 공적연금이 채권시장에 참여함에 따라 민간부문은 순채무자로 돌아서게 된다. 이에 따라 민간부문의 (공적연금 불입분을 제외한) 총자산 중 위험자산 보유비중은 1을 넘게 된다.

46) $g(0) = 0$ 은 $\omega = 0$ 일 때, 즉 기금자산을 100% 무위험자산에 투자하는 경우 적립방식으로의 전환에도 불구하고 무위험채권시장의 초과공급이 1차적으로 발생하지 않는다는 의미이다.

47) 특히 임의로 가정하고 도입한 함수 $g(\cdot)$ 의 구체적 형태에 대한 논의가 추가될 필요가 있다. 예를 들어, $g'(x)$ 이 $\kappa\sigma^2$ 보다 크지 않은지 여부에 따라 자본스톡공급함수(K_t^s)의 직접적인 증가분($\omega(s_t' - s_t)w_t$)과의 비교가 가능해질 것이다.

V. 결 론

본 연구에서는 확정급여형 부과방식 공적연금이 존재하는 경우를 기본모형으로 하여 공적연금의 거시경제적 영향과 고령화의 진전 및 연금 수급구조의 변동에 따른 자본 축적의 변화에 대한 이론적 논의의 결과를 제시하였다. 본문에서 논의된 결과는 다음과 같이 두 가지 정도로 정리할 수 있다.

첫째, 공적연금의 도입 및 연금의 소득 이전기능 강화는 자본 축적을 저해하는 것으로 나타났다. 이러한 결과는 연금제도의 도입 내지 강화가 청년층 소비자에게 있어 저축유인의 감소와 동시에 위험자산에 대한 투자유인의 증대라는 이중적 의미를 지니나 전자의 효과가 후자의 효과를 압도하는 데 기인한 것이다.

둘째, 고령화의 진전은 자본 축적에 부정적인 영향을 주지만 자본의 기대수익률에 대해서는 고령화의 진행단계에 따라 다른 효과를 발생시킨다. 구체적으로 고령화가 가속화되는 과정에서는 위험자산의 기대수익률이 감소하는 반면 고령화의 진전이 진정되는 국면에서는 위험자산의 기대수익률이 증가하게 된다. 이러한 이론적 예측은 적어도 부과방식 연금을 운영하는 경우 소위 자산시장 대붕괴(meltdown) 현상이 고령화가 이미 진전된 시점보다는 가속화되는 초기 시점에

서 관측될 가능성이 있음을 시사한다. 더욱이 위험자산에 대한 수요의 감소, 즉 자본공급의 증가에 대응하여 위험자산 공급이 감소, 즉 자본수요가 증가하는 현상은 위험자산의 기대수익률 하락이 일부의 우려와 달리 심각한 수준에 이르지 않을 가능성을 시사한다.

공적연금의 재정부담과 관련하여 연기금자산의 위험자산 운용에서 새로운 패러다임의 필요성이 대두되는 시점에서 본 연구의 분석 결과는 공적연금의 자산 운용방식의 변경에 따라 기대되는 거시경제적 효과가 간과할 수 없는 수준임을 확인하기에 충분하다. 다만, 본 연구에서도 출된 결론이 일정 부분 사용된 모형의 특수성에 기인한 것이었을 개연성을 배제할 수 없으며 이를 극복하는 방향으로 후속 연구가 진행되어야 할 것이다. 이하에서는 본 연구의 한계점을 살펴보고 이를 극복하기 위하여 필요한 후속 연구의 방향에 대하여 논의하는 것으로 결론을 맺는다.

먼저, 우리나라 가계자산의 80%를 부동산이 차지하고 있는 사실을 감안하여 주택 보유를 명시적으로 반영하는 모형의 분석이 필요하다. 주택은 저축수단으로서 자산뿐 아니라 주거 서비스를 제공하는 소비재로서의 기능도 수행한다. 따라서 주택 서비스와 비주택 재화 및 서비스가 효용함수에 반영되고 위험자산, 무위험자산, 주택자산이 저축수단으로 허

용된 2-재화 3-자산 모형으로의 확장이 불가피해진다. 더불어 주택담보대출이 가계대출의 2/3 가량을 차지하고 있고 주택경기의 부침에 따라 가계의 소비행태가 영향을 받는 현실을 고려하여 부채인정비율(loan-to-value)이나 총부채상환비율(debt-to-income ratio) 형태의 신용제약을 명시적으로 도입하는 방안을 고려할 만하다.

둘째, 개인의 노동공급을 여가와 소비사이의 선택으로 정의하고 은퇴시기 역시 자발적으로 결정되는 내생변수로 설정하는 경우 균형이 어떤 방식으로 영향을 받는지에 대하여 추가적으로 논의할 필요가 있다. 이는 특히 고령화의 빠른 진전으로 인하여 경제활동인구의 감소가 예상되는 상황에 대응하여 경제주체들이 노동공급 결정을 조정할 수 있는 통로를 모형에 명시적으로 허용함으로써 공적연금의 운용방식 변화와 고령화의 진전이 총노동공급에 미치는 궁극적인 영향을 측정하기 위해서이다.

셋째, 본 연구에서는 부과방식의 공적연금제도를 대상으로 분석을 시도하였으나 우리나라의 경우 원칙적으로 적립방식의 공적연금이 시행되고 있다는 점에서 본 연구의 논의 결과는 적립방식의 공적연금제도까지를 포괄하는 방향으로 확장될 필요가 있다. 우리나라와 같은 기금

적립방식하에서는 연금납입률 s_t 와 소득 대체율 η_t 가 사전적으로 확정된 형태이므로 수입과 지출의 상대적 격차에 따라 기금의 축적 또는 감소 현상이 발생하게 된다. 한편, 기금자산을 이용한 자산운용 계획이 위험자산과 무위험자산 혹은 주식과 채권의 투자비중 등의 형태로 결정되어야 한다. 따라서 공적연금의 투자비중이 어떻게 정해지는가에 따라 자산 간의 상대가격이나 수익률은 차이를 보이게 될 것이다. 본 연구를 포함하여 공적연금의 거시경제적 영향을 주제로 일반 균형적 분석을 실시하는 대다수의 기존 연구들은 공적연금이 부과방식에 따라 매기 수지균형이 정산되는 것으로 가정하고 논의를 전개하였으므로 연금기금의 축적과 그 운용방식의 차이에 따른 거시경제적 영향에 대한 심도 깊은 논의는 크게 진전을 보지 못하고 있다. 이러한 문제점에 대응하는 첫 번째 단계로 우선 일정한 규모의 연금 축적을 가정하고 축적된 자산을 운용하는 과정에서 자산 보유 비중이 변화하는 데 따른 금융시장과 거시경제의 반응을 분석하는 방향으로 후속 연구가 진행될 필요가 있다(허석균 [2007]). 특히 부과방식과 적립방식 연금하에서 조세의 왜곡효과가 달라질 수 있다는 점은 매우 흥미로운 분석 대상이다.⁴⁸⁾

48) 부과방식과 적립방식 중 어느 쪽을 선택하는지에 따라 보험료와 보험급여 간의 연계가 달라질 수 있으며 이에 따라 후생손실(deadweight loss)도 달라질 수 있다. 이 점을 지적해 주신 익명의 논평자에게 감사

마지막으로 본 연구에서 모형의 해에 대한 도출가능성(tractability)을 유지하기 위하여 채택된 가정에 의하여 정성적 분석 결과 중 일부가 달라질 가능성을 배제할 수 없다. 예를 들어, 절대적 위험회피 계수가 일정한 효용함수의 특성에 기인한 부분과 일반적인 위험기피적 선호체계하에서도 성립하는 부분을 구분할 필요가 있으며, 청년층과 노인층 두 세대로 획정된 연령별 구분을 세분화하는 작업도 나름의 의의를 가질 것으로 판단된다. 이상에서 제시된 방향으로 후속 연구

를 진행하기 위해서는 대부분의 경우 본 연구에서와 같이 분석적인 결론을 도출하는 것이 불가능하며 결국 수치해석적 방법론의 도입이 불가피함을 쉽게 알 수 있다. 따라서 본 연구의 결과와 본 연구의 한계점을 극복하고 확장한 연구의 결과를 직접적으로 비교하는 것이 큰 의미는 없을 것으로 판단되며, 다만 본 연구가 수치해석적 방법론을 사용한 후속연구의 결과를 해석하는 데 있어 이론적 잣대로서 나름의 역할을 수행할 수 있을 것으로 기대할 수 있다.

참 고 문 헌

- 허석균, 「공적연금이 거시경제에 미치는 영향에 관한 연구」, 미출간 원고, 2007.
- Abel, A., “The Social Security Trust Fund, the Riskless Interest Rate, and Capital Accumulation,” in J. Campbell and M. Feldstein(eds.), *Risk Aspects of Investment-based Social Security Reform*, NBER Conference Report, University of Chicago Press, 2001.
- Bohn, H., “Social Security and Demographic Uncertainty: The Risk Sharing Properties of Alternative Policies,” in J. Campbell and M. Feldstein(eds.), *Risk Aspects of Investment-based Social Security Reform*, NBER Conference Report, University of Chicago Press, 2001.
- Bovenberg, A. and H. Uhlig, “Pension Systems and the Allocation of Macroeconomic Risk,” CEPR Working Paper #5949, 2006.
- Boldrin, M., M. De Nardi, and L. Jones, “Fertility and Social Security,” NBER Working Paper #11146, 2005.
- Brooks, R., “The Equity Premium and the Baby Boom,” Working Paper, 2003.
- Brooks, R., “Asset Market Effects of the Baby Boom and Social Security Reform,” *American Economic Review Papers & Proceedings*, Vol. 92, 2002, pp.402~406.
- Brooks, R., “What Will Happen to Financial Markets When the Baby Boomers Retire?” IMF Working Paper, 2000.
- De La Croix, D. and P. Michel, “A Theory of Economic Growth: Dynamic and Policy in Overlapping Generations,” Cambridge University Press, 2002.
- Feldstein, Martin and Jeffrey B. Liebman, “Social Security,” NBER Working Paper Series, 2001.
- Iacoviello, M., “House Prices, Borrowing Constraints, and Monetary Policy in the Business Cycle,” *American Economic Review* 95, 2005, pp.739~764.
- Imrohoroglu, A., S. Imrohoroglu, and D. Joines, “Social Security in an Overlapping Generations Economy with Land,” *Review of Economic Dynamics*, Vol. 2, 1999, pp.638~665.
- Krueger, D. and F. Kubler, “Intergenerational Risk-Sharing via Social Security When Financial Markets are incomplete,” *American Economic Review*, Vol. 92, 2002, pp.407~410.
- Krueger, D. and F. Kubler, “Computing Equilibrium in OLG Models with Stochastic Production,” *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 28, 2004, pp.1411~1436.
- Krueger, D. and F. Kubler, “Pareto-Improving Social Security Reform when Financial Markets are Incomplete,” *American Economic Review*, Vol. 96, 2006, pp.737~755.
- Krueger, D. and K. Schmedders, “Stationary Equilibria in Asset-Pricing Models with Incomplete

- Markets and Collateral,” *Econometrica*, Vol. 71, 2003, pp.1767~1793.
- Miles, D. and A. Cerny, “Risk, Return and Portfolio Allocation under Alternative Pension Systems with Incomplete and Imperfect Financial Markets,” *Economic Journal* 116, 2006, pp.529~557.
- Poterba, J., “Demographic Structure and Asset Returns,” *Review of Economics and Statistics* 83, 2001, pp.565~584
- Sanchez—Marcos, V. and A. Sanchez-Martin, “Can Social Security be welfare improving when there is Demographic Uncertainty?,” *Journal of Economic Dynamics & Control* 30, 2006, pp.1615~1646.
- Shiller, R., “Social Security and Institution for Intergenerational, Intragenerational and International Risk Sharing,” *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 50, 1999, pp.165~204.
- Stokey, N., R. Lucas, and E. Prescott, “Recursive Methods in Economic Dynamics,” Harvard University Press, 1989.
- Wang, Y., “Stationary Equilibria in an overlapping generations economy with stochastic production,” *Journal of Economic Theory* 61, 1993, pp.423~435.
- Zeldes, S., “Consumption and Liquidity Constraints: An Empirical Investigation,” *Journal of Political Economy* 97, 1989, pp.305~346.

■ 부록 A ■ 자본공급함수의 도출

식(16)과 (17)로 표현되는 자본공급함수를 도출하기에 앞서 다음의 두 보조정리를 먼저 논의한다.

보조정리 1. $z_{t+1}|I_t \sim N(\Xi_t, \sigma^2)$. I_t 는 시점 t 까지의 정보집합(information set)을 의미하며 $\Xi_t = [\ln\theta + (1-\theta)\ln q_{t+1} + (1-\theta)(\ln L_t - \ln K_t) + \ln A_t]$ 이다. 다시 말해, 시점 t 에서 위험자산 수익률의 조건부 확률분포는 평균 Ξ_t , 분산 σ^2 인 정규분포를 따른다. 증명) 이윤극대화의 일계조건 중 하나인 식 (10)으로부터 다음의 관계를 쉽게 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} \ln(1+z_{t+1}) &= \ln\theta + \ln A_{t+1} + (1-\theta)\ln L_{t+1} - (1-\theta)\ln K_t \\ &= \ln\theta + (1-\theta)(\ln L_{t+1} - \ln K_t) + \ln A_t + \epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

따라서

$$z_{t+1} \simeq [\ln\theta + (1-\theta)\ln q_{t+1} + (1-\theta)(\ln L_t - \ln K_t) + \ln A_t] + \epsilon_{t+1} = \Xi_t + \epsilon_{t+1}$$

식 (11)에 주어진 조건을 고려하여 조건부 평균과 분산을 구하면 원하는 결과를 얻을 수 있다.

보조정리 2. $c_{t+1}^o|I_t \sim N(((1+\Xi_t)\Psi_t + \eta w_t), \sigma^2)$. 여기에서 $\Psi_t = ((1-s_t)w_t - c_t^y)$ 이다. 증명) 최적 선택점에서 위험자산의 비중(α_t)이 1이라는 점을 고려하여 효용극대화 문제 (2)의 예산제약조건을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$c_{t+1}^o = ((1-s_t)w_t - c_t^y)(1+z_{t+1}) + \eta w_t$$

따라서 보조정리 1에 의거하여 c_{t+1}^o 의 조건부 확률분포는 정규분포를 따르며 평균과 분산은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} E_t(c_{t+1}^o) &= ((1-s_t)w_t - c_t^y)(1+E_t(z_{t+1})) + \eta w_t \\ &= ((1-s_t)w_t - c_t^y)(1+\Xi_t) + \eta w_t = \Psi_t(1+\Xi_t) + \eta w_t \end{aligned}$$

$$Var_t(c_{t+1}^o) = ((1-s_t)w_t - c_t^y)^2 Var_t(z_{t+1}) = \Psi_t^2 \sigma^2$$

지금부터 본격적으로 식 (16)과 (17)을 도출한다. 먼저 무위험자산시장의 균형조건인 $\alpha_t = 1$ 을 개인의 효용극대화 일계조건 (6)과 (7)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\kappa \exp(-\kappa c_t^y) - \beta E_t [\kappa \exp(-\kappa c_{t+1}^o)(1+z_{t+1})] = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$E_t [\kappa \exp(-\kappa c_{t+1}^o)(z_{t+1} - r_{t+1})] = 0 \quad (\text{A.2})$$

여기에 식 (A.1)에 식 (A.2)를 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\exp(-\kappa c_t^y) - \beta(1+r_{t+1})E_t [\exp(-\kappa c_{t+1}^o)] = 0 \quad (\text{A.3})$$

한편, 보조정리 2에 의하여 노년기 소비 c_{t+1}^o 의 조건부 확률 분포는 정규분포이므로 식 (A.3)의 조건부 평균은 다음과 같이 명시적으로 계산된다.

$$\begin{aligned} E_t [\exp(-\kappa c_{t+1}^o)] &= \exp\left[-\kappa E_t(c_{t+1}^o) + \frac{\kappa^2}{2} \text{Var}_t(c_{t+1}^o)\right] \\ &= \exp\left[-\kappa((1+\Xi_t)\Psi_t + \eta_t w_t) + \frac{\kappa^2}{2} \Psi_t^2 \sigma^2\right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

(A.3)과 (A.4)를 결합하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\exp(-\kappa c_t^y) = \beta(1+r_{t+1}) \exp\left[-\kappa((1+\Xi_t)\Psi_t + \eta_t w_t) + \frac{\kappa^2}{2} \Psi_t^2 \sigma^2\right] \quad (\text{A.5})$$

식 (A.5)의 양변에 자연대수로그를 취한 후 정리하면, 다음의 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned} c_t^y + \frac{\ln \beta(1+r_{t+1})}{\kappa} - ((1+\Xi_t)\Psi_t + \eta_t w_t) + \frac{\kappa}{2} \Psi_t^2 \sigma^2 &= 0 \\ \Rightarrow \ln(1+r_{t+1}) &= \kappa((1+\Xi_t)\Psi_t + \eta_t w_t) + \frac{\kappa^2}{2} \Psi_t^2 \sigma^2 - \kappa c_t^y - \ln \beta \\ \Rightarrow r_{t+1} \approx \ln(1+r_{t+1}) &= \kappa((1+\Xi_t)\Psi_t + \eta_t w_t) + \frac{\kappa^2}{2} \Psi_t^2 \sigma^2 - \kappa c_t^y - \ln \beta \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

한편, 식 (2) 및 (A.4)로부터 개별 소비자의 최적 위험자산비중 α_t 는 다음의 최적화 문제의 해와 일치함을 알 수 있다.

$$\min_{\alpha_t} \left[-E_t(c_{t+1}^o) + \frac{\kappa}{2} \text{Var}_t(c_{t+1}^o) \right]$$

$$s.t. \quad c_{t+1}^o = ((1-s_t)w_t - c_t^y)(\alpha_t(1+z_{t+1}) + (1-\alpha_t)(1+r_{t+1})) + \eta_t w_t \quad (\text{A.7})$$

내부 해를 가정하고 최적화의 일계조건을 구한 후 무위험자산시장의 균형조건인 $\alpha_t = 1$ 을 대입하여 c_t^y 의 함수로 정리하면 식 (16)을 구할 수 있다.

$$c_t^y = (1-s_t)w_t - \frac{E_t[z_{t+1}] - r_{t+1}}{\kappa\sigma^2} \quad (\text{A.8})$$

이제 (A.6)의 세 번째 식의 우변에 남아 있는 c_t^y 대신에 (A.8)의 우변을 대입하고, 이를 r_{t+1} 에 대한 2차방정식으로 풀어내면 비로소 식 (17)을 얻게 된다.

■ 부록 B ■

[명제 1]의 증명

자본수요를 나타내는 식 (19)를 위험자산 기대수익률에 대하여 미분하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{dK_t^d}{dE_t[z_{t+1}]} = -\frac{\exp(-E_t[z_{t+1}])}{1-\theta} [\theta A_t q_{t+1}^{1-\theta} \exp(-E_t[z_{t+1}])]^{-\frac{\theta}{1-\theta}} < 0 \quad (\text{B.1})$$

[명제 2]의 증명

자본수요를 나타내는 식 (18)을 위험자산 기대수익률에 대하여 미분하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{dK_t^s}{dE_t[z_{t+1}]} = \frac{q_t}{\kappa\sigma^2} \left(1 - \frac{dr_{t+1}}{dE_t[z_{t+1}]}\right) \quad (\text{B.2})$$

따라서 자본공급함수의 기울기는 위험자산 수익률의 변동이 무위험자산의 수익률 변동보다 더 큰지 여부에 의하여 결정된다. 한편, 무위험자산 수익률을 나타내는 식 (17)을 위험자산의 기대수익률로 미분하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{dr_{t+1}}{dE_t[z_{t+1}]} = \frac{(E_t[z_{t+1}] + 2)}{\sqrt{(E_t[z_{t+1}] + 2)^2 + 2\sigma^2\left(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2\right) - 2\kappa w_t \sigma^2(1 - s_t - \eta)}} \quad (\text{B.3})$$

$(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2) \geq \kappa w_t(1 - s_t - \eta)$ 이 라 면 $0 < \frac{dr_{t+1}}{dE_t[z_{t+1}]} \leq 1$ 이 된다. 반면 $(2 - \ln\beta + \frac{1}{2}\sigma^2) < \kappa w_t(1 - s_t - \eta)$ 의 경우 $\frac{dr_{t+1}}{dE_t[z_{t+1}]} > 1$ 가 된다. 이러한 관계를 식 (A.2)의 결과와 비교하면 원하는 결과를 얻을 수 있다. ■

[명제 3]의 증명

$$\lim_{E_t[z_{t+1}] \rightarrow \infty} \frac{dK_t^s}{dE_t[z_{t+1}]} = \frac{q_t}{\kappa\sigma^2} \left(1 - \lim_{E_t[z_{t+1}] \rightarrow \infty} \frac{dr_{t+1}}{dE_t[z_{t+1}]}\right) \text{이며}$$

$$\lim_{E_t[z_{t+1}] \rightarrow \infty} \frac{dr_{t+1}}{dE_t[z_{t+1}]} = 1 \text{ 이므로 원하는 결과를 얻을 수 있다. } \blacksquare$$

[명제 9]의 증명

자본수요함수인 식 (31)은 기업의 이윤 극대화의 결과로 쉽게 도출된다.

청년층 1인의 자본공급, 즉 위험자산 수요는 $((1-s)w_t - c_t^y)$ 이고 청년층인구는 q_t 이므로 총자본공급은 식 (32)의 첫 번째 등호와 같이 주어진다. 한편, 식 (29)를 식 (32)에 대입하면 두 번째 등호를 얻을 수 있다.

식 (31)의 양변에 자연대수를 취하고 정리하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\ln K_t = \frac{1}{1-\theta} (\ln\theta + \ln A_t + (1-\theta)\ln q_{t+1} - E_t[z_{t+1}]) \tag{B.4}$$

식 (28)에 식 (A.4)를 대입하면 다음과 같이 원하는 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_t &= E_t\left[\frac{\eta_t}{s} - 1\right] = E_t[z_{t+1}] - z_t + \ln K_t - \ln K_{t-1} \\ &= \frac{-\theta}{1-\theta} E_t[z_{t+1}] - z_t - \ln K_{t-1} + \ln q_{t+1} + \frac{1}{1-\theta} (\ln\theta + \ln A) \end{aligned} \tag{B.5}$$

■